UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DE GUAYANA
VICE-RECTORADO ACADEMICO
DEPARTAMENTO DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
AREA DE MATEMATICAS

GUIA DE MATEMATICAS I,
CAPITULO II

Prof. Orlando Baisdem Pérez

Puerto Ordaz, Abril del 2010.

Capítulo 2

Funciones Reales

2.1. Función

Definición 2.1 *Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, en los cuales se define una relación de A en B. Decimos que esa relación es una **función**, si y sólo sí, **todo** elemento de A se relaciona con un **único** elemento en B.*

En otras palabras, para que una relación entre los conjuntos A y B sea función es necesario que por medio de ella "todo elemento del conjunto A esté asociado con un único elemento del conjunto B".
La función f de A en B se denota por f:$A \Rightarrow B$.
Una relación de A en B puede no ser función, los siguientes gráficos ilustran esta situación.

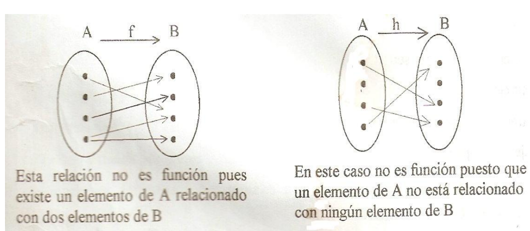


Figura 2.1: Conjuntos y funciones

Si $f : A \Rightarrow B$ es una función y x es un elemento cualquiera de A, entonces existe un elemento y que pertenece a B que está relacionado con x mediante la función f, a tal elemento y se le llama imagen de x mediante f y se denota por $y = f(x)$.
La expresión $y = f(x)$ se lee ≪ y es la imagen de x mediante f ≫ ó ≪ y es el valor de la función f en x ≫. Ella representa la regla de asociación que permite asignar a cada elemento del conjunto A, su correspondiente imagen.

Ejemplo 1 *Consideremos los conjuntos* $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ *y* $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *y la función* $f : A \Rightarrow B$ *donde* $f(x) = x^2$

La regla $y = f(x)$ nos permite encontrar la imagen de cada elemento del conjunto A, la función la podemos representar mediante un gráfico o como un conjunto de pares $f = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

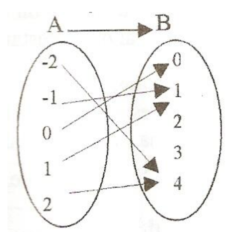


Figura 2.2: Conjunto e Imagenes

2.1.1. Dominio y Rango de una Función

Sea f una función tal que $f : A \Rightarrow B$ con $y = f(x)$. El conjunto A se llama **dominio** de la función f y se denota por $Domf$. Es decir, $Domf = A$ y al conjunto B se le llama codominio de f.

Al subconjunto de B, conformado por todos los elementos relacionados con elementos del dominio mediante la función, lo llamaremos **rango** de la función f y lo denotaremos por Ragf. Es decir, $Ragf = \{y : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}$

. En el ejemplo anterior el dominio es el conjunto A, el codominio es B y el rango es el conjunto formado por las imágenes Ragf= $\{0, 1, 4\}$.

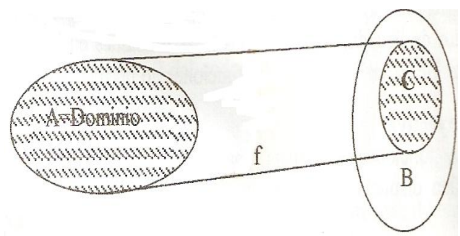


Figura 2.3: Dominio y Rango

A: Conjunto de salida o dominio.

B: Conjunto de llegada o codominio.

C: Conjunto imagen o rango (C está contenido en B).

Observacion 1

1. *Si la función esta definida de A en B entonces, el dominio de dicha función es el conjunto A y el codominio es el conjunto B.*
2. *Todos los elementos del dominio de una función deben estar relacionados con algún elemento del codominio (conjunto de llegada).*
3. *Pueden existir elementos en el codominio de una función (conjunto de llegada) que no imagen de elemento alguno del dominio.*
4. *No puede existir elemento del dominio de una función que posea más de una imagen en el conjunto de llegada (codominio)*

2.1.2. Clasificación de Funciones según su Naturaleza

En base al conjunto imagen y a la forma como se relacionan los elementos:

1. **Inyectiva:** Cuando f asigna a diferentes valores de A, diferentes valores de B. Cuando una imagen tiene una sola contraimagen. Si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2$ ó $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

2. **Sobreyectiva:**Cuando su conjunto imagen es igual al conjunto B. $f(A) = B$ también f es sobreyectiva $\Leftrightarrow [\forall y \in B \exists x \in A / y = f(x)]$. En otras palabras son aquellas funciones en las que todos los elementos del conjunto de llegada poseen imagen reciproca.

3. **Biyectiva:** Cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejemplo 2 *Consideremos las funciones f, g, h e i, las cuales se visualizan mediante un los siguientes diagramas.*

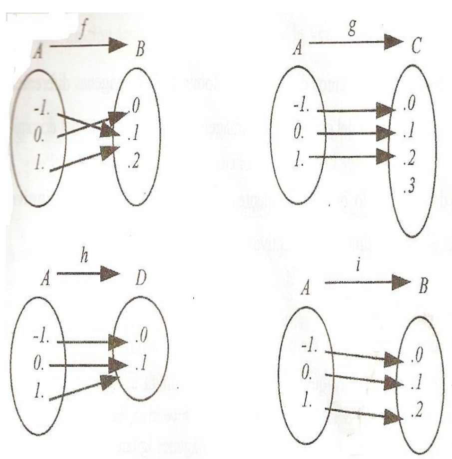


Figura 2.4: Dominio y Rango

De acuerdo a las definiciones anteriores vemos que:

- f no es inyectiva, ya que dos elementos diferentes del dominio tienen la misma imagen f tampoco es sobreyectiva, ya que el elemento 2 del codominio, no es imagen de ningún elemento del dominio.

- g es inyectiva, pues, no existen elementos diferentes del dominio con la misma imagen. Pero, g no es sobreyectiva, ya que el elemento 3 del codominio, no es imagen de ningún elemento del dominio.

- h no es inyectiva, dos elementos diferentes del dominio tienen la misma imagen. En cambio, h es sobreyectiva, por ser todos los elementos del codominio imágenes de algún elemento del dominio.

- Es claro que i es inyectiva y sobreyectiva.

2.1.3. Inversa de una Función

Definición 2.2 *La función inversa f^{-1} está constituida por todos los pares ordenadas (y, x) tales que $(x, y) \in f$ que cumplen las siguientes condición:*

1. *f debe ser uno a uno*

2. *Dominio de f^{-1} = Rango de f*

3. *Rango de f^{-1} =Dominio de f*

Relaciones entre f y f^{-1}.

Si f^{-1} existe, entonces

1. $x = f^{-1}(y)$ si y sólo si $y = f(x)$

2. $f^{-1}[f(x)] = x$ para toda x en el dominio de f

3. $f[f^{-1}(y)] = y$ para toda y en el dominio de f^{-1} o, si x y y se han intercambiado,$f[f^{-1}(x)] = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}.

Determinación de la inversa de una función f.

1. Encuentre el dominio de f y verifique que f es uno a uno. Si f no es uno a uno, no continue, ya que f^{-1} no existe.

2. Resuelva la ecuación $y = f(x)$ para x. El resultado es una ecuación de la forma $x = f^{-1}(y)$.

3. Intercambiar x y y en la ecuación encontrada en el paso2Esto expresa a f^{-1} como una función de x.

4. Encuentre el dominio de f^{-1}. Recuerde, el dominio de f^{-1} debe ser igual que el rango de f.

La gráfica de f contiene el punto (a, b) si y sólo si la gráfica de f^{-1} contiene el punto (b, a).

Ejemplo 3 *Hallar dominio, rango, biyectividad, inversa y graficar en un mismo sistema de coordenadas cartesianas la función y su inversa de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = 2x^3 - 1$

2. $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Solución

1. $f(x) = 2x^3 - 1$ Por ser un polinomio es claro que:
   Dominio: R
   Rango: R
   Para demostrar la **biyectividad**, debemos demostrar que f es inyectiva y sobreyectiva a la vez
   Inyectividad:
   Dados dos números cualesquiera del dominio, digamos x_1 y x_2, se cumple que:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1^3 - 1 = 2x_2^3 - 1$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1^3 = 2x_2^3$$

$$x_1 = x_2$$

Esto es , imagenes iguales corresponden a preimágenes iguales, y así queda demostrado que f es inyectiva.

Sobreyectividad:

Despejando x de la ecuación $f(x) = 2x^3 - 1$, obtenemos $x = \sqrt[3]{\frac{y+1}{2}}$. Por tanto, como $\sqrt[3]{\frac{y+1}{2}} \in \mathbb{R}$ para todo número real y, se cumple que Ragf= $\mathbb{R}$. Esto es, el rango y el codominio de la función f coinciden.

Siendo f una función inyectiva y sobreyectiva a la vez, podemos concluir que f es **biyectiva**.

Inversa:

Como f es inyectiva la función tiene inversa.

Despejamos x de la función: $x = \sqrt[3]{\frac{y+1}{2}}$

Intercambiamos x e y

$y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} \Rightarrow f^{-1} = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$

La inversa de: $f(x) = 2x^3 - 1$ es $f^{-1} = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$

El siguiente plano cartesiano podremos observar f y f^{-1}.

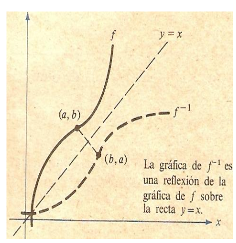


Figura 2.5: Una función y su inversa

2. $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$ **Dominio:**Es claro que el dominio será $\mathbb{R}$

Rango: $\mathbb{R}$

Para demostrar la **biyectividad**, debemos demostrar que p es inyectiva y sobreyectiva a la vez

Inyectividad:

Dados dos números cualesquiera del dominio, digamos x_1 y x_2 del dominio de p se tiene que:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{x_1^2+1} = \frac{x_2}{x_2^2+1}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1x_2^2 + x_1 - x_1^2 - x^2 = 0$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1x_2(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1) = 0$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_2 - x_1)(x_1x_2 - 1) = 0$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_2 - x_1 = 0 \vee x_1x_2 - 1 = 0$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = \frac{1}{x_2}$$

En consecuencia, si dos números del dominio de la función p tienen la misma imagen, entonces los números son iguales, o uno es el inverso multiplicativo del otro (2 y $\frac{1}{2}$ tienen la misma imagen. Así, p no es inyectiva. Por lo tanto, tampoco es biyectiva ni tiene inversa. Se deja como tarea, determinar si es o no sobreyectiva.

2.1.4. Representación Gráficas de Funciones Reales

Consideremos un sistema de coordenadas cartesiana, y f una función real de variable real tal que:

$$f : A \Rightarrow B \wedge f(x) = y$$

A cada elemento $(x, f(x))$ de f, le podemos asociar un punto del plano cartesiano (como se ilustran en la siguiente figura).

El conjunto de todos los puntos del plano, que se asocian con los elementos de f, se denomina **representación gráfica** de la función f.

Ejemplo 4 *Trazar la representación gráfica de la función f tal que $f(x) = 2x$.*

Solución

Si asociamos a cada uno de los pares $(x, 2x)$ un punto en el plano cartesiano y sabiendo que todos pares $(x, 2x)$ estan sobre la recta cuya ecuaciónes $y = 2x$. Se concluye que tal recta es la representación gráfica de la función f

.

2.1.5. Estudio y Representación Gráfica de las Funciones más usadas

Es una forma de analizar las características principales de las funciones más comunes.

1. **Función Constante:** Todos los elementos del dominio poseen la misma imagen. Su expresión matemática tiene la forma $f(x) = b$ (b constante).
   Dominio= $\mathbb{R}$,
   Rango= $\{b\}$.
   Su representación es una recta horizontal que pasa por el punto $(0, b)$. La función no es inyectiva ni sobreyectiva.

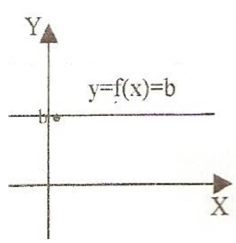


Figura 2.6: Función constante

2. **Función Identidad:**Todo elemento del dominio es idéntico a su imagen.
   Expresión matemática: $f(x) = x$
   Dominio= $\mathbb{R}$,
   Rango= $\mathbb{R}$,
   Su representación es una recta que forma 45 con la dirección positiva del eje x, y pasa or el origen. Puede deducirse fácilmente que esta función es biyectiva.

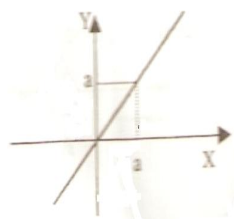


Figura 2.7: Función Identidad

3. **Función Afin:**Las imagenes obtienen multiplicando a los elementos del dominio por una constante y sumando otra.
   Expresión matemática: $f(x) = ax + b$
   Dominio= $\mathbb{R}$,
   Rango= $\mathbb{R}$,(si $a = 0$, Rango= $\{b\}$
   Su representación grafica es una recta de pendiente a y ordenada en el origen b. Las funciones constante e identidad, son casos particulares de la función afin, ya que pueden obtenerse para valores específicos de a y b. Es biyectiva salvo en el caso de $a = 0$.

4. **Función Potencial:** Las imagenes se obtienen elevando a una potencia natural los elementos del dominio.
   Expresión matemática: $f(x) = x^n$(n$\in \mathbb{N}$)
   Dominio= $\mathbb{R}$,

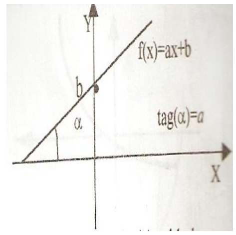


Figura 2.8: Función Afin

Rango= Depende del valor de n

De cualquier forma pueden deducirse fácilmente que para n impar el rango es $\mathbb{R}$ y para n par es $[0, +\infty)$.

La representación gráfica también depende de n, y veremos aqui algunos casos.

a) Cuando $n = 1$, $f(x) = x$, es la función identidad ya estudiada.

b) Cuando $n = 2$, $f(x) = x^2$, es la función potencial de segundo grado, y su gráfica es una parábola. No es inyectiva pues $f(-2) = f(2)$.

c) Cuando $n = 3$, $f(x) = x^3$, es la función cúbica o función potencial de tercer grado, y su gráfica se muestra en el gráfico siguiente: Es biyectiva.

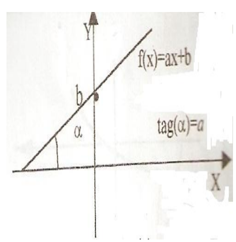


Figura 2.9: Función Potencial

5. **Función Polinómica:**Toda función cuya regla de correspondencia entre los elementos del dominio (x) y sus imagenes (f(x)) sea de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... +$

$a_1x_1 + a_0$ es una función polinómica. En la definición anterior se debe tomar en cuenta:

a) n es un entero positivo.

b) a_i, $i = 0, 1, 2, ...n$ son constantes reales.

c) a_i, $i = 0, 1, 2, ...n$ se les denomina coeficientes del polinomio y al entero positivo n, se le llama grado del polinomio (por supuesto a$_n \neq 0$)
Dominio=Rango= R

6) **Función Cuadrática o trinomio de Segundo Grado:** Es una función cuadrática aquella cuya regla de correspondencia entre los elementos del dominio y las imagenes es de la firma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b,y c son constantes reales y $a \neq 0$.

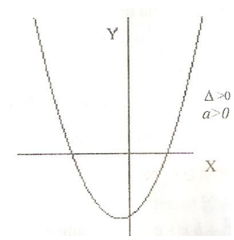


Figura 2.10: Función Cuadrática

7. **Función Valor Absoluto o Módulo:**Denominamos función valor absoluto de x, a la función que asigna a cada número real x el número no negativo $|x|$ (valor absoluto de x) que se define mediante:

$$f(x) = |x| = \{ \begin{array}{c} x, six \geq 0 \\ -xsix < 0 \end{array}$$

Su representación gráfica consiste de una línea quebrada formada por las rectas $y = x$ e $y = -x$ de acuerdo a la definición, la gráfica será: la parte correspondiente a la recta $y = x$ situada en el primer cuadrante y la parte correspondiente a la recta $y = -x$ en el segundo cuadrante.
Dominio: R
Rango: $\mathbb{R}^+ \vee \{0\}$

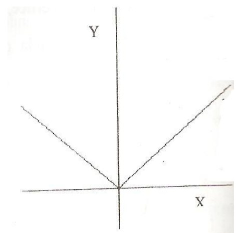


Figura 2.11: Función Valor Absoluto

Propiedades del Valor Absoluto

a) $|x| = \sqrt{x^2}$

b) $|x + y| \geq |x| + |y|$

c) $|x| = |-x|$

d) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

e) $|x^2| = |x|^2 = x^2$

2.1.6. Composición de Funciones

Sean A y B subconjuntos de R y consideremos las funciones

$$f : A \Rightarrow R \wedge f(x) = y$$

y

$$g : B \Rightarrow R \wedge g(x) = y$$

Supongamos que $Ragf \cap B \neq \emptyset$, entonces existe x tal que $f(x)$, asi, a este elemento $f(x)$ le podemos aplicar g para obtener $g(f(x))$.
Consideramos una función h dada por $h(x) = g(f(x))$. Esta función h manda directamente al elemento $x \in A$ en el elemento $g(f(x))$ y recibe el nombre de función compuesta de f y g . La composición de dos funciones f y g se denota $fog(x) = f(g(x))$
.

Ejemplo 5 *Dadas $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$, hallar las composiciones fog y gof e identificar sus dominios.*

Solución
En primer lugar,

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2})$$
$$(fog)(x) = \sqrt{(x-2)}^2 + 1 = x - 2 + 1 = x - 1$$

Se tiene la tentación de decir quer el dominio fog es toda la recta real, pero ¡cuidado!. Para que x esté en el dominio de g ha de ser $x \geq 2$. El dominio de f es toda la recta real, de manera que no impone restricción adicional sobre el dominio de fog. Así, pues, aunque la expresión final $x - 1$ podría definirse para todo x, el dominio de (fog) es $\{x|x \geq 2\}$. En cuanto a la segunda composición,

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1)$$
$$(gof)(x) = \sqrt{(x^2+1) - 2} = \sqrt{x^2 - 1}$$

La raíz cuadrada resultante exige $x^2 - 1 \geq 0$, o sea, $|x| \geq 1$. Como función interior esta definida en todas sus partes, el dominio de gof es $\{x \in \mathbb{R}||x| \geq 1\}$. En notación de intervalos, $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

2.1.7. Traslaciones Verticales y Horizontales de la Representación Gráfica de una Función

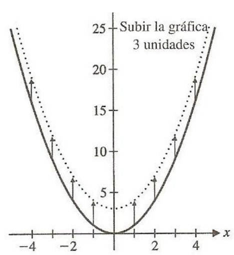
En esta sección veremos algunos criterios que permiten obtener la representación gráfica de nuevas funciones a partir de la representación gráfica de otras.
Si f es una función cualquiera y c es una constante real positiva, tenemos

Traslaciones Verticales

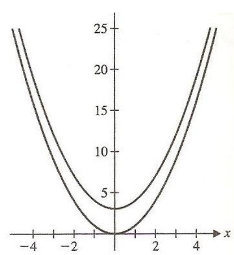
Trazar Representación grafica	Trasladar la representación gráfica
$g(x) = f(x) + c$	c unidades hacia arriba
$g(x) = f(x) - c$	c unidades hacia abajo

Ejemplo 6 *Representar $y = x^2$ e $y = x^2 + 3$. Comparar sus gráficas*

Solución Al analizar las dos gráficas, observamos que la principal diferencia es que una corta al eje y en 0 y la otra en 3. Es claro que para cualquier x, el punto de la gráfica de $y = x^2 + 3$ está 3 unidades más arriba que el de $y = x^2$. Ambas gráficas se dibujaron en el mismo eje.



Traslación de una gráfica hacia arriba.



$y = x^2$ e $y = x^2 + 3$.

Figura 2.12: Traslación Vertical

Traslaciones Horizontales

Trazar Representación grafica	Trasladar la representación gráfica
$g(x) = f(x+c)$	c unidades hacia a la izquierda
$g(x) = f(x-c)$	c unidades hacia a la derecha

Ejemplo 7 *Representar $y = x^2$ e $y = (x-1)^2$. Comparar sus gráficas*

Solución Al analizar las dos gráficas, observamos que $(x-1)^2$ esta desplazada 1 unidad hacia la derecha respecto a la de $y = x^2$

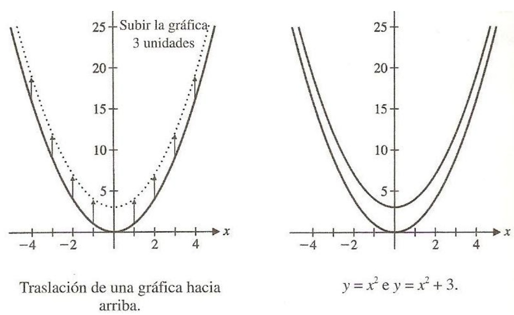


Figura 2.13: Traslación Horizontal

2.1.8. Función Racional

Definición 2.3 *Cualquier función expresable como cociente*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

de dos polinomios p y q se dice que es una función ***racional***.

Al ser p y q polinomios, estan definidos para todo x. En consecuencia, la función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

esta definida para todos los x tales que $q(x) \neq 0$. Si a es un número real, que $q(a) = 0$ y $p(a) \neq 0$, entonces la recta $x = a$ es una asintota vertical de la gráfica de $y = f(x)$

Definición 2.4 ***Asintotas horizontales y verticales***
*La recta $x = a$ es una **asintota vertical** para la gráfica de $y = f(x)$, si $f(x)$ aumenta o disminuye sin limite conforme x se aproxima a a desde la derecha o desde la izquierda. De manera simbolica,*
$f(x) \to \infty$ ó $f(x) \to -\infty$ conforme $x \to a^+$ ó $x \to a^-$.
*La recta $y = b$ es una **asintota horizontal** para la gráfica de $y = f(x)$ si $f(x)$ se aproxima a b conforme x aumenta sin limite o conforme x disminuye sin limite. De manera simbólica, $f(x) \to b$ conforme $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$.*

Asintotas horizontales y funciones racionales

Sea f una función racional definida por el cociente de los dos polinomios como sigue:

$$f(x) = \frac{a_m x^m + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + ... + b_1 x + b_0}$$

1. Para $m < n$, la recta $y = 0$ (el eje x) es una asintota horizontal.

2. Para $m = n$, la recta $y = a_m/b_n$ es una asintota horizontal

3. Para $m > n$, la gráfica aumentará o disminuirá sin límite, dependiendo de m, n, a_m y b_n, y no hay asintotas horizontales.

Graficación de funciones racionales $f(x) = n(x)/d(x)$

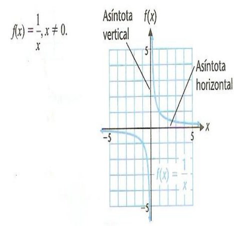


Figura 2.14: Asintota Horizontal y Vertical

1. **Intersecciones**. Encuentre las soluciones reales de la ecuación $n(x) = 0$ y úselas para trazar cualquier intersección con el eje x de la gráfica de f. Evalúe $f(0)$, si existe, y trace la intersección con el eje y.
2. **Asintotas verticales**. Encuentre las soluciones reales de la ecuación $d(x) = 0$ y úselas para determinar el dominio de f, los puntos de discontinuidad y las asintotas verticales. Trace cualquier asintota vertical como lineas discontinuas.
3. **Cuadro de signos**. Construya un cuadro de signos para f y úselo para determinar el comportamiento de la gráfica cerca de cada asintota vertical.
4. **Asintotas horizontales**. Determine si existe una asintota horizontal y si es así, trácela como una linea discontínua.
5. **Complete el trazo**. Complete el trazo de la gráfica dibujando puntos adicionales y uniéndolos con una curva continua y suave sobre cada intervalo en el dominio de f. No cruce ningún punto de discontinuidad.

Ejemplo 8 *Dada* $f(x) = \frac{2x}{x-3}$. *Hallar Dominio, Rango y Gráfica.*

Solución

1. **Intersecciones**. Encuentre las soluciones reales de la ecuación $n(x) = 2x$ y encuentre f(0):
   $2x = 0$
   $x = 0$ intersección con x
   $f(0) = 0$ intersección con y

2. **Asintotas verticales**. Encuentre las soluciones reales de la ecuación $d(x) = x - 3$:
   $x - 3 = 0$
   $x = 3$
   El dominio de f es $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$,f$esdiscontinuaenx = 3$ y la gráfica tiene una asíntota vertical en $x = 3$. Trace la asintota.

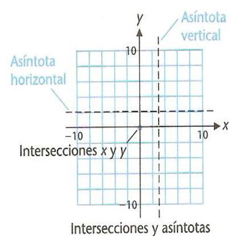
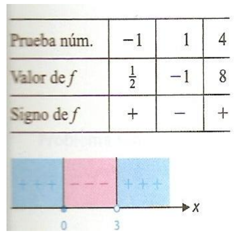


Figura 2.15: Asintota Horizontal y Vertical

3. **Cuadro de signos**. Construya un cuadro de signos para $f(x)$. Como $x = 3$ es una asintota vertical, y $f(x) < 0$ para $0 < x < 3$
   $f(x) \to -\infty$ conforme $x \to 3^-$
   Como $x = 3$ es una asintota vertical y $f(x) > 0$ para $x > 3$
   $f(x) \to \infty$ conforme $x \to 3^+$

4. **Asintotas horizontales**. Como $n(x)$ y $d(x)$ tienen el mismo grado, la recta $y = 2$ es una asintota horizontal



Prueba núm.	-1	1	4
Valor de f	$\frac{1}{2}$	-1	8
Signo de f	$+$	$-$	$+$

Figura 2.16: Cuadro de signos

5. **Complete el trazo**. Dibujando algunos puntos adicionales,se obtiene la una curva continua suave en el intervalo $(-\infty, 3)$ y sobre el intervalo (3,∞); $hayunaseparaci\acute{o}nenlagr\acute{a}fica$x=3.

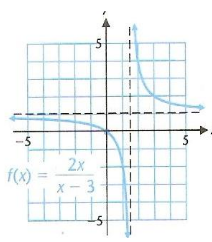


Figura 2.17: Grafica de la función racional

2.2. Paridad, Monotonia, Acotamiento y Periodicidad de Funciones

A continuación estudiaremos ciertas propiedades de las funciones reales las cuales son útiles al momento de graficarlas.

2.2.1. Función par e Impar

Definición 2.5 *Se dice que una función es* ***par*** *si su gráfica es simétrica respecto al eje* y*, es decir, sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = f(-x)$ *para todo real* X *en el dominio de* f*.*

Definición 2.6 *Se dice que una función es* ***impar*** *si su gráfica es simétrica respecto al origen, es decir,*f *es una función impar* $f(-x) = -f(x)$ *si para todo real* x *en el dominio de* f*. Se entiende que* $-x$*, esta en el dominio de* f *siempre que* x *esté.*

Ejemplo 9 *Determinar si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguna de ambas. Después, calcular los ceros de la función*

.

1. $f(x) = x^3 - x$

2. $g(x) = 1 + cosx$

Solución:

1. La función es impar, ya que

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$$

   los ceros o raices de f se calculan como sigue:
   $x^3 - x = 0$
   $x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) = 0$
   Se puede apreciar que las raices son $x = 0, 1, -1$

2. La función es par, pues
   $g(-x) = 1 + cos(-x) = 1 + cosx = g(x)$
   Las raices de g se calculan como sigue:
   $1 + cosx = 0$

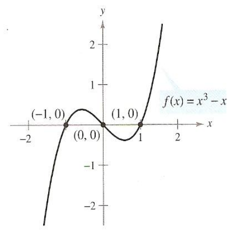


Figura 2.18: Función Impar

$cosx = -1$

$x = (2n + 1)\Pi$, con n entero

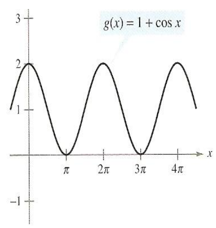


Figura 2.19: Función Par

2.2.2. Función Monotona

Definición 2.7 *Una función f es estrictamente creciente en un intervalo si $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.*

Definición 2.8 *Una función f es estrictamente decreciente en un intervalo si $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.*

Definición 2.9 *Una función f es creciente (o decreciente) en todo un intervalo en el cual la función esté definida, se dice que f es monótona en ese intervalo.*

Ejemplo 10 *Sea f una función tal que $f(x) = x^3$. El dominio de esta función es R y para cada $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ se cumple que $x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1)^3 < (x_2)^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, en consecuencia f es una función creciente en todo su dominio.*

Ejemplo 11 *La función f definida por $f(x) = 2 - x$ es decreciente en todo su dominio,pues, para cada $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ se cumple que*
$x_1 < x_2 \rightarrow -x_1 > -x_2$
$x_1 < x_2 \rightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2$
$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

2.2.3. Función Acotada

Definición 2.10 *Sea f una función con dominio A y un intervalo I f es* ***acotada superiormente*** *en I, si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq N$, $\forall x$ f es acotada en I, si f es acotada superior e inferiormente en I. Esto es, si existen $M, N \in \mathbb{R}$, tal que $N \leq f(x)$, $\forall x \in I$*

Definición 2.11 *Sea f una función con dominio $A \subset \mathbb{R}$, y un intervalo $I \subset A$ f es* ***acotada*** *en I, si existe $m \in$*

Ejemplo 12 *Sea f una función tal que $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R} \wedge f(x) = -2 + \sqrt{9 - x^2}$, en consecuencia $|f(x)| \leq 2$, $forallx \in [-3, 3]$ Luego, f es una función acotada.*

2.2.4. Función Periódica

Definición 2.12 *Una función $f(x)$ es periódica si existe un número p tal que pueda hacer $f(x + p) = f(x)$ para todas las x. Al menor número p se le llama período.*

Ejemplo 13 *Por ejemplo, $y = sen(x)$ es una función periódica con un período de 2π porque 2π es el menor número p que hace que $sen(x + p) = sen(x)$ para todas las x.*

2.3. Funciones Trigonométricas

En muchos fenómenos de la vida real aparecen **ondas**. La música de la radio se transmite en forma de ondas electromagnéticas que, decodificadas por el receptor, hacen vibrar una fina membrana en los altavoces. Esa vibración, a su vez, produce ondas de presión en el aire. Cuando esas ondas alcanzan nuestros órganos auditivos, oímos la musica. Todas estas ondas son **periódicas**: su forma básica se repite una y otra vez.

Definición 2.13 ***Definición de las seis funciones trigonométricas:*** *Con referencia a la siguiente figura*

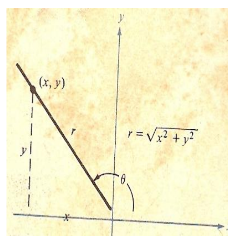


Figura 2.20: Triangulo Rectangulo

$sen\theta = \frac{y}{r}$ $\qquad csc\theta = \frac{r}{y}$

$cos\theta = \frac{x}{y}$ $\qquad sec\theta = \frac{r}{x}$

$tan\theta = \frac{y}{x}$ $\qquad cot\theta = \frac{x}{y}$

Graficas

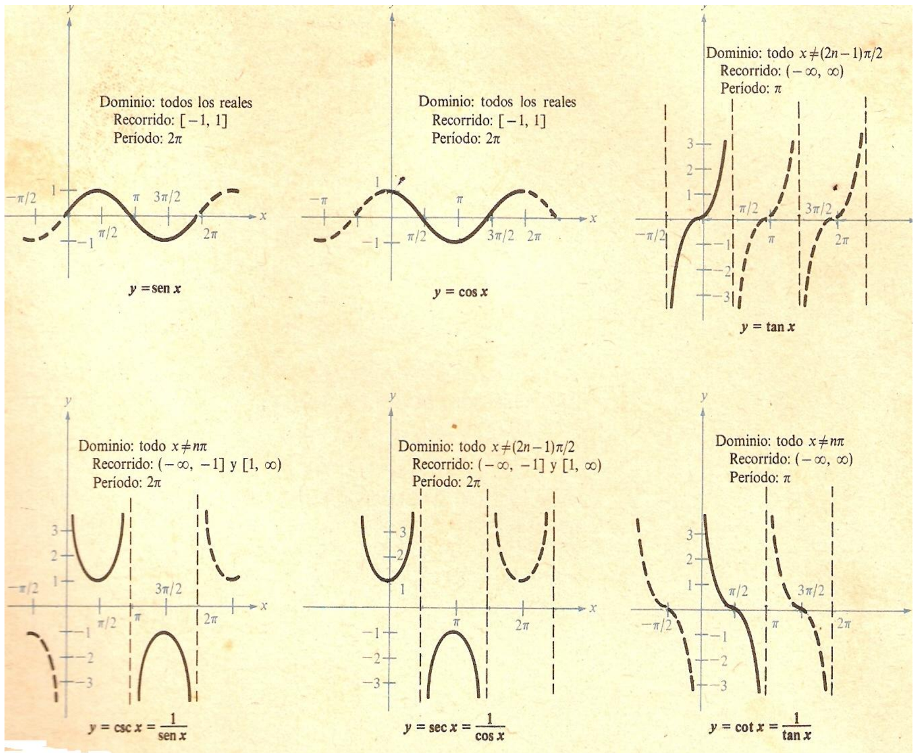


Figura 2.21: Funciones Trigonométricas

Ejemplo 14 *Representar $y = 2senx$ e $y = sen2x$. Describir en qué difieren de la gráfica de sen x.*

Solución La gráfica $y = 2senx$ es similar a la de $y = senx$, salvo que los valores de y oscilan entre -2 y 2, no entre -1 y 1.

La gráfica de $y = sen2x$ es también análoga a la de $y = senx$, pero tiene período π en lugar de 2π (oscila dos vences más de prisa).

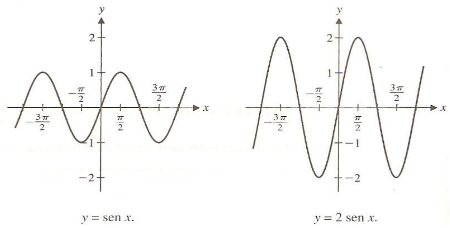


Figura 2.22: Alteración de la amplitud y del periodo

2.4. Funciones Trigonométricas Inversas

Las funciones trigonométricas no son inyectivas, de modo que hace falta restringir los dominios de cada una a intervalos convenientes. Los intervalos que generalmente se eligen son: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ para seno, $[0, \pi]$ para coseno y $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ para tangente
porque son los mayores intervalos que contienen al número 0 y en elcual la función correspondiente es inyectiva.

2.4.1. Función inversa del seno

Definición 2.14 *La **función inversa del seno**, se denota por* sen^{-1} *o **arcoseno**, se define como la inversa de la función restringida del seno* $y = senx$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. *En consecuencia,*
$y = sen^{-1}x$ *y* $y = arcsenx$
son equivalentes a
$seny = x$ *donde* $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, $-1 \leq x \leq 1$

En otras palabras, el inverso del seno de x, o del arcoseno de x, es el número o el ángulo y, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ cuyo seno es x.
Grafica

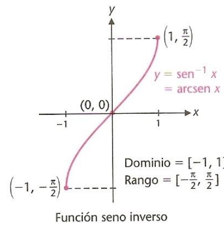


Figura 2.23: Función inversa de seno

2.4.2. Función inversa del coseno

Definición 2.15 *La* ***función inversa del coseno****, se denota por* cos^{-1} *o* ***arcocoseno****, se define como la inversa de la función restringida del coseno* $y = cosx$, $0 \leq x \leq \pi$. *En consecuencia,*

$y = cos^{-1}x$ *y* $y = arccosx$

son equivalentes a

$cosy = x$ *donde* $0 \leq y \leq \pi$, $-1 \leq x \leq 1$

En otras palabras, el inverso del coseno de x, o del arcocoseno de x, es el número o el ángulo y, $0 \leq y \leq \pi$ cuyo coseno es x.

Grafica

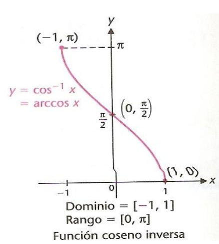


Figura 2.24: Función inversa del coseno

2.4.3. Función inversa de la tangente

Definición 2.16 *La **función inversa de la tangente**, se denota por* tan^{-1} *o **arcotangente**, se define como la inversa de la función restringida de la tangente* $y = tanx$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$*. En consecuencia,*
$y = tan^{-1}x$ *y* $y = arctanx$
son equivalentes a
$tany = x$ *donde* $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq$
$frac\pi 2$*, y x es un número real*

En otras palabras, la inversa de la tangente de x, o el arcotangente de x, es el número o el ángulo y, $\frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ cuyo tangente es x.
Grafica

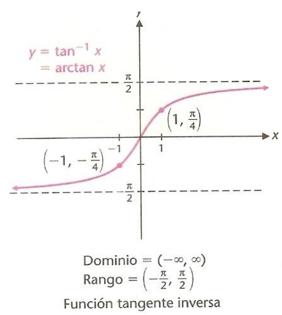
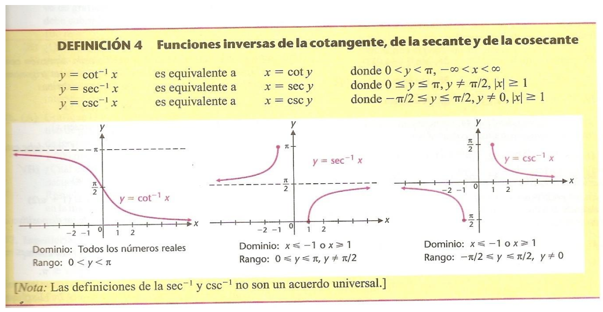


Figura 2.25: Función inversa de la tangente


DEFINICIÓN 4 Funciones inversas de la cotangente, de la secante y de la cosecante

$y = \cot^{-1} x$ es equivalente a $x = \cot y$ donde $0 < y < \pi$, $-\infty < x < \infty$
$y = \sec^{-1} x$ es equivalente a $x = \sec y$ donde $0 \leq y \leq \pi$, $y \neq \pi/2$, $|x| \geq 1$
$y = \csc^{-1} x$ es equivalente a $x = \csc y$ donde $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, $y \neq 0$, $|x| \geq 1$

Dominio: Todos los números reales
Rango: $0 < y < \pi$

Dominio: $x \leqslant -1$ o $x \geqslant 1$
Rango: $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $y \neq \pi/2$

Dominio: $x \leqslant -1$ o $x \geqslant 1$
Rango: $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, $y \neq 0$

[*Nota:* Las definiciones de la $\sec^{-1}$ y $\csc^{-1}$ no son un acuerdo universal.]

Figura 2.26: Funciones inversas de la cotangente, de la secante y de la cosecante

2.4.4. Funciones inversas de la cotangente, de la secante y de la cosecante

2.5. Funciones Exponenciales y Logaritmicas

2.5.1. Función Exponencial

Definición 2.17 *Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces nos referimos a $y = a^x$ como la función exponencial de base a.*

Propiedades de los Exponentes(a, $b > 0$)

1. $a^0 = 1$
2. $a^x a^y = a^{x+y}$
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $(ab)^x = a^x b^x$
6. $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

Definición 2.18 $e = lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$
(Con doce digitos significativos, $e \approx 2{,}71828182846$*)*

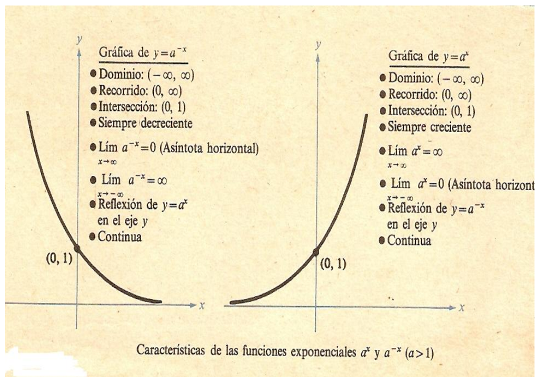


Figura 2.27: Características de la Función Exponencial

2.5.2. Función Logaritmica

Definición 2.19 ***.Definición de log**$_a x.Si$**a ¿0**y**a**$\neq 1$**, entonces,*** $log_a x = b$ ***si y solo sí*** $a^b = x$ ($log_a x = b$ ***se lee (el logaritmo en base*** a ***del número*** x ***en b)***

Definición 2.20 ***.Definición de logaritmo natural****. la función logaritmo cuya base es* e *se llama* ***función logaritmo natural*** *y se denota por* $log_e x = lnx$*.*

Características de la función logaritmica

Propiedades inversas de las funciones exponenciales y logarítmicas

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces $log_a(a^u)$ y $a^{log_a^u} = u$

Si $a = e$, entonces

$ln(e^u) = u$ y $e^{lnu} = u$

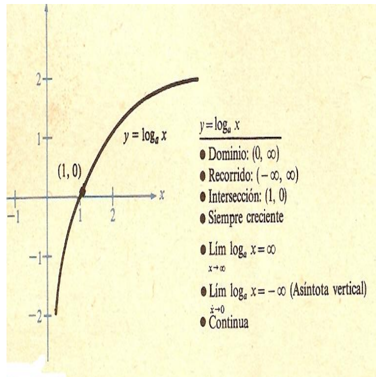


Figura 2.28: Características de la Función Logaritmica

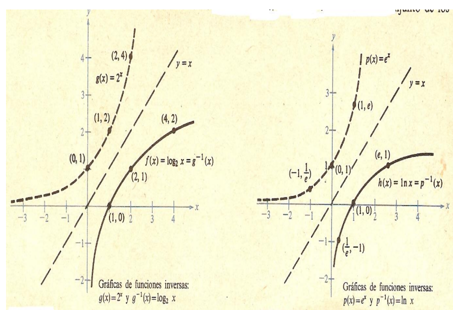


Figura 2.29: Relaciones inversas entre la funciones

Propiedades de los logaritmos (a,$b > 1$)

1. $log_a 1 = 0$
2. $log_a a = 1$
3. $log_a(uv) = log_a u + log_a v$
4. $log_a(\frac{u}{v}) = log_a u - log_a v$

5. $log_a(u^n) = nlog_a u$

6. $log_a u = (\frac{log_b u}{log_b a})$

7. $log_a b = (\frac{1}{log_b a})$
   Idénticas propiedades son válidas si $log_a u$ es sustituido por $log_e u = lnu$

Representación gráfica entre la función exponencial y la función logaritmica

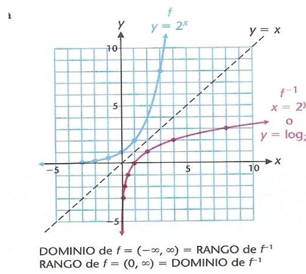


Figura 2.30: Función exponencial y logaritmica

Ejercicos Propuestos

Hallar el Dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 2x^5 - 3\sqrt[3]{4x-1} + \frac{x(x^5-6)}{\sqrt{3-\sqrt{4x^2-1}}}$

2. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x^2}}$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4-2}}$

4. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$

5. $f(x) = \sqrt{4+x^2} + \frac{1}{\sqrt{4-x}}$

6. $f(x) = log\sqrt{1 - ln(x^2 - 1)}$
7. $f(x) = ln\sqrt{\frac{x-1}{x+5}}$
8. $f(x) = arccos(ln(x-1)^2)$
9. $f(x) = ln(\frac{senx}{1-x})$
10. $f(x) = arccos(ln(\frac{x-1}{x-2}))$
11. $f(x) = \frac{x^2-9}{x^3+3x^2+2x}$
12. $f(x) = \sqrt{ln(\frac{x^2+1}{x^4-x^3+2x^2-2x} + 1)}$
13. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^4+5x^3+5x^2-5x-6}}$
14. $f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{6} - arcsen(lnx)}$
15. $f(x) = Ln|x^2 - 4| + arcsen\sqrt{2 - \frac{1}{Lnx}}$

Dadas las funciones reales f y g definidas respectivamente, por $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ y $g(x) = log(x - 1)$ Determinar

1. Dominio de f y g
2. Producto de f por g
3. Representación gráfica de $f(x)$ y $|g(x)|$
4. ¿Son f y g inyectivas y/o sobreyectivas?
5. ¿Son f y g funciones acotadas?
6. El rango de f
7. La inversa de f y g haciendo restricciones de ser necesario.