FUNCION IMPLÍCITA Y SU DERIVADA

Supongamos que los valores de las variables x e y, se encuentran relacionados por una ecuación que simbólicamente denotamos así:

$$G(x,y)=0. \quad (1)$$

Si y depende de la variable x, mediante una función y =f(x) definida en un intervalo (a,b), y satisfacen la ecuación (1) entonces diremos que y=f(x) es una función implícita definida por la ecuación (1) . Por ejemplo la ecuación $x^2 + y^2 - 4 = 0$ determina implícitamente las funciones

$$y = \sqrt{4-x^2} \quad y \quad y = -\sqrt{4-x^2} \quad (2)$$

Las funciones anteriores se obtienen fácilmente de la ecuación dada. Sin embargo, no siempre es posible hallar la forma explícita de una función definida implícitamente. Por ejemplo

$$y^2 - xy + \cos(y) = 0 \quad (3)$$

En este caso es imposible despejar y en función de x.

Veamos como se obtiene la derivada de una función implícita sin necesidad de pasarla al forma explicita (y=f(x))

Supongamos que la función se define mediante la ecuación $x^2 + y^2 - 4 = 0$

Derivando ambos miembro respecto a x y considerando a y como función de x se obtiene:

$2x+2yy'+0 = 0$, despejando y' se tiene que $y' = -x/y$. Verifique que las funciones explicitas (2) satisfacen la igualdad $y' = -x/y$

Ejercicio Encuentre la derivada de y con respecto a x, para la ecuación (3)

Ejemplo. La *hoja de Descartes* es la representación gráfica de la ecuación

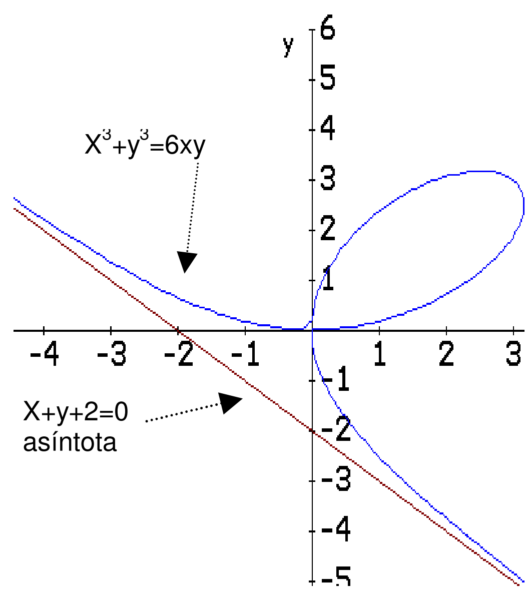
$$X^3+y^3 = 6xy$$

Esta curva fue propuesta por René Descartes como reto a Pierre de Fermat para determinar su recta tangente en un punto cualquiera

Solución. Usando derivación implícita se obtiene:

$$3x^2 + 3y^2y' = 6(y + xy')$$

de donde $$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$



Ejercicio. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (3,3)

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Ya conocemos la derivada de la función $y=\sqrt[n]{x}$ $\quad que \quad es \quad$ $y'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$. Veamos otra forma de obtener esta derivada.

$y=\sqrt[n]{x} \;\Rightarrow\; Lny=\dfrac{Lnx}{n}$ por propiedad del logaritmo natural . Derivando ambos miembros de la última igualdad con respecto a x, se obtiene $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{x} \Rightarrow y'=\dfrac{y}{nx}$. Sustituyendo y por $y=\sqrt[n]{x}$ tenemos $y'=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$ que es equivalente a $y'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ **(verifíquelo)**

La estrategia anterior es muy utilizada porque a menudo simplifica los cálculos. Otro ejemplo

1 Una función $y=[u]^g$ donde u y g son funciones de la variable x las cuales son derivables, se puede derivar aplicando previamente logaritmo $Lny = g.Ln[u]$ para luego derivar.

$$\frac{y'}{y}=g'Ln[u]+g.\frac{u'}{u} \quad\Rightarrow\quad y'=\left[g'Ln[u]+g.\frac{u'}{u}\right].y \quad \text{sustituyendo y por } [u]^g$$

$$y'=\left[g'.Ln[u]+g.\frac{u'}{u}\right][u]^g=g'Ln[u].[u]^g+g.u'[u]^{g-1}$$

* Aplique este resultado en las funciones $y = x^x$, $y = \left(x^2\right)^{senx}$

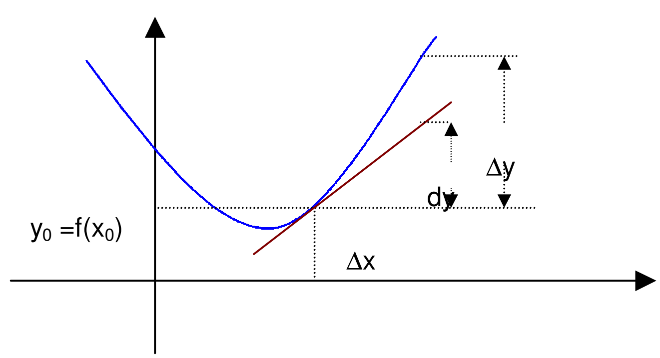
DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

Sean una función *y = f(x)* derivable en x_0 y el punto $P(x_0,f(x_0))$. Como f es derivable en x_0 entonces $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$. Así, si Δx es "pequeña" el cociente $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ será aproximadamente $f'(x_0)$, de manera que $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx \Delta x.f'(x_0)$

La expresión $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ se denota Δy y representa el cambio real en la variable y cuando x cambia de x_0 a $x_0+\Delta x$. la expresión $\Delta x.f'(x_0)$ se denota por dy y se le llama diferencial de
la variable dependiente y.

<u>Diferencial de una función en un punto</u>

Se define *diferencial de una función y=f(x)* en un punto *x*, y se simboliza por *dy* ó *df(x)*, al producto *f'(x)·dx* donde *dx representa un incremento arbitrario de x (diferencial de x)* Por tanto,
dy = df(x) = f'(x) ·dx



<u>Propiedades de la diferencial</u>

Primera propiedad:

La diferencial de una función en un punto depende de dos variables: el punto *x* elegido y el incremento dx que se ha tomado.

Segunda propiedad:

Al ser $dy = f'(x)dx$, la diferencial de una función en un punto es el incremento de la ordenada de la recta tangente al aumentar en dx la abscisa *x*.

Tercera propiedad:

Si se considera la función *y = f(x), entonces dy = f'(x)dx.* Así, se puede escribir $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

La expresión $\frac{dy}{dx}$ se utiliza para indicar la derivada de la variable y con respecto a la variable x, en este caso no se le trata como un cociente de diferenciales, sino como un símbolo

Cuarta propiedad:
cuando *h* es infinitamente pequeño, el diferencial *dy* es prácticamente igual a f(x+h)-f(x)
Es decir, $dy \approx f(x+h) - f(x)$. Esta propiedad permitirá sustituir dy por $f(x+h) - f(x)$
cuando *h* es muy pequeño, con la seguridad de que el error cometido será mínimo.

Ejercicios: cálculos aproximados utilizando la diferencial

1.- Un móvil se mueve según la relación $s = 5t^2 + t$, donde *s* representa el espacio recorrido medido en metros y *t* el tiempo medido en segundos.
Se quiere saber los metros que recorre el móvil en el tiempo comprendido entre 7 segundos y $\left(7 + \frac{1}{3}\right)$ segundos.

Solución:

• Diferenciando la expresión $s = 5t^2 + t$, se obtiene $ds = (10t + 1) \cdot dt$

Por otro lado, $dt = 7 + \frac{1}{3} - 7 = \frac{1}{3}$

• Sustituyendo en la expresión de *ds*,

$$ds = (10 \cdot 7 + 1) \cdot \frac{1}{3} = 23{,}66 \text{ (metros)}$$

Se puede determinar que en realidad recorre algo más de 23,66 metros:

$$s = 5\left(7 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(7 + \frac{1}{3}\right) - \left(5 \cdot 7^2 + 7\right) = 24{,}18 \text{ metros.}$$

Se ha cometido un error de 24,18 m - 23,66 m = 52 cm

2.- Demostrar que $\operatorname{sen} t \approx t$ para valores pequeños de t

Solución:

Si $y = \operatorname{sen} x$ $dy = \cos(x)dx$ para $x=0$ y $dx=t$ se obtiene $dy = t.\cos 0 = t$, pero $\Delta y = \operatorname{sen}(0+t) - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} t$, como sabemos $dy \approx \Delta y$. Luego $\operatorname{sen} t \approx t$ siempre que t sea "pequeño"`

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1.- Derive y simplifique la función $f(x) = Ln\left(a + x + \sqrt{2ax + x^2}\right)$

2.- Demuestre que la derivada de $f(x) = Arc\,\text{sen}\,\frac{x^2 - 1}{x^2}$ *es* $f'(x) = \frac{2}{x\sqrt{2x^2 - 1}}$

3.- Sea $f(x) = \text{arcsen}\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ a) Demuestre que $f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ b) ¿ Qué relación existe entre la función f y la función g(x)=arctgx ?

4.- La gráfica de la ecuación $x^2-xy+y^2=9$ es una curva que corta al eje X en dos puntos

a) Encuentre la ecuación de la recta tangente en dichos puntos

b) Encuentre los puntos donde la curva tiene tangente horizontal

5.- Para cada una de las siguientes funciones encuentre Primera y segunda derivada:

$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$ $\quad g(x) = x^{2/3}(x^2 - 2x - 6)$ $\quad y= 8x^5-5x^4-20x^3$

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS

Teorema de Fermat: Si f es derivable en $\mathbf{x_0}$ y alcanza un extremo relativo en x_0. entonces $f'(x_0)=0$

Proposiciones relacionadas: (verdaderas o falsas)

a) Si f es una función derivable en x_0 y $f'(x_0)=0$ entonces f tiene un valor extremo en x_0

b) Si una función no es derivable en x_0 entonces no alcanza un valor extremo en x_0

Teorema de Rolle. Si g es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y g(a)=g(b) entonces existe un número c tal que a<c<b y g'(c)=0

Demostración
Si g(x) es constante entonces g'(x) = 0 para todo $x \in (a, b)$.

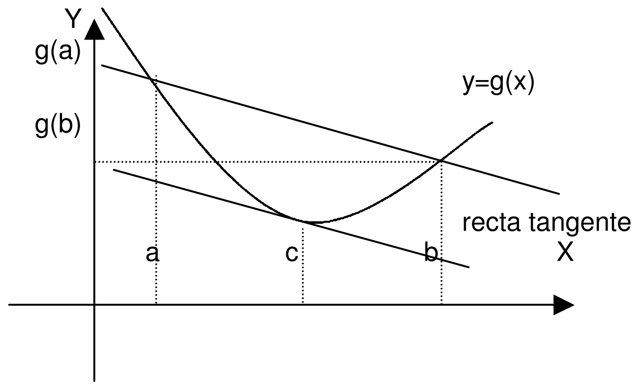
Si g(x) no es constante, por ser continua en [a , b], tendrá un máximo absoluto M y un mínimo absoluto N.

No puede ser M = N = g (a) = g (b), porque entonces sería constante. Así pues, existe al menos un punto c del interior del intervalo en el que g(x) toma el valor del máximo o del mínimo y, por tanto, de acuerdo al teorema de Fermat será g'(c) = 0.

Teorema del valor medio. Si g es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) entonces existe un número c tal que a<c<b y g(b)-g(a)=g'(c)(b-a) o en forma equivalente

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$$

Observemos que $\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta que une los puntos (a, g (a)) y (b,g(b)). Por lo tanto el teorema afirma que existe un punto (c, g(c)) en que la tangente es paralela a la recta que une los puntos (a, g (a)) y (b, g(b)) del gráfico de la función.



La función f(x) = x^3 - x – 2 es continua en [0 , 2] y derivable en (0 , 2).

Como f(0) = - 2 y f(2) = 4, por el teorema del valor medio existe un c ∈ (0, 2) tal que:

$$\frac{4-(-2)}{2-0}=f'(c) \Rightarrow 3c^2-1=\frac{6}{2} \quad \Rightarrow \quad c^2=\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad c=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$, como c∈(0,2) entonces c = $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Corolarios:

a) Si g es una función derivable en un intervalo I y g'(x) = 0 para toda x∈I entonces g es constante en todo el intervalo I
b) Si f y g son funciones tales que f '(x)=g'(x) para todo x en un intervalo abierto I, entonces las funciones f y g difieren en una constante (f(x)- g(x) = c ∀x∈ I)

Teorema de los puntos críticos Sea f definida en un intervalo I que contiene al número c. Si f(c) es un valor extremo, entonces c tiene que ser un punto crítico; es decir c satisface una de las siguientes condiciones:

i) Es punto frontera de I
ii) f '(c) = 0
iii) f '(c) no existe

Este teorema nos garantiza que que los valores extremos se alcanzan solamente en puntos (números) críticos. Veamos una aplicación.

Ejemplo. Encontrar los extremos absolutos de la función
f(x) = $-2x^3+3x^2$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2},2\right]$

Solución f '(x) =$-6x^2+6x$, f '(x) = 0 ⇒ $-6x^2+6x = 0$ ⇒ 6x(-x+1) = 0 ⇒ x = 0 ó x = 1
Luego los únicos números críticos son los extremos del intervalo -½ y 2 , además de 0 y 1, puesto que f es una función polinómica (derivable en todo su dominio)
Evaluando la función en los números críticos se obtiene:
f($-^1/_2$) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = -4, Así el valor mínimo absoluto es -4 que se alcanza en x=2 , y el máximo absoluto es 1 que se alcanza en -½ y en 1. En x = 0 probablemente se alcance un extremo relativo.

Teorema de monotonía. Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b):

i) si $f'(x)>0$ para toda x en (a,b) entonces f es creciente en $[a,b]$;

ii) si $f'(x)<0$ para toda x en (a,b) entonces f es decreciente en $[a,b]$;

Ejercicio. Verifique usando este teorema que la función dada en el ejemplo anterior es decreciente en los intervalos [-½ , 0] y [1,2] , y es creciente en [0, 1]

Teorema Prueba de la primera derivada para extremos relativos

Sea f una función continua en un intervalo abierto (a,b) que contiene al número c y supóngase que f es derivable en todo el intervalo (a,b) excepto posiblemente en c:

i) Si $f'(x)>0$ para todo $x\in(a,c)$ y $f'(x)<0$ para todo $x\in(c,b)$ entonces f alcanza un máximo relativo en c.

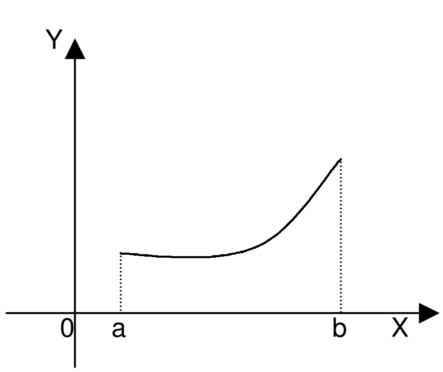
ii) Si $f'(x)<0$ para todo $x\in(a,c)$ y $f'(x)>0$ para todo $x\in(c,b)$ entonces f alcanza un mínimo relativo en c

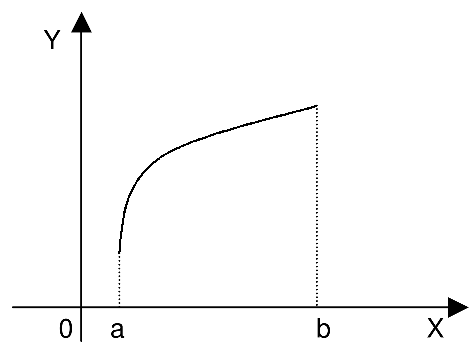
Ejercicio. Verifique que la función $f(x) = -2x^3+3x^2$ alcanza un máximo relativo en $x=1$

Concavidad y Puntos de inflexión.

Hemos visto como se relaciona la derivada con el crecimiento de una función. Pero no es suficiente con conocer donde crece y donde decrece una función para dibujar una buena gráfica.

En las siguientes figuras se muestran las gráficas de dos funciones crecientes.





Si estamos graficando una función y sabemos que es creciente en [a , b], pero no sabemos cómo es la curva entre los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) para poderla trazar, este es un detalle es muy importante para la graficación y se trata de la concavidad.

Definición. Para una función f que sea derivable en el intervalo (a,b), la gráfica de f es:

i) Cóncava hacia arriba en (a, b), si f' es creciente en (a, b)

ii) Cóncava hacia abajo en (a, b), si f' es decreciente en (a, b)

Teorema. Si f es una función con segunda derivada en el intervalo abierto I entonces:

i) Si $f''(x)>0$ en I, entonces la curva $y=f(x)$ es cóncava hacia arriba en cada punto con abscisa en I

ii) Si $f''(x)< 0$ en I, entonces la curva $y=f(x)$ es cóncava hacia abajo en cada punto con abscisa en I

Oservación: El teorema anterior no ofrece información alguna sobre la concavidad de una función, en aquellos puntos donde la segunda derivada es nula. Para analizar esta situación obtenga la segunda derivada de las funciones $f(x) = x^4$ y $g(x) = x^3$ evalúelas en $x=0$, luego represente ambas funciones y determine su concavidad en el punto (0,0).

Definición. Sean f una función continua en (a, b) y $c \in (a, b)$, y supóngase que la gráfica de f cambia de concavidad en el punto (c, f(c)), es decir en (a, c) tiene un tipo de concavidad y en (c, b) tiene el otro tipo de concavidad. Entonces, al punto (c, f(c)) se le llama punto de inflexión del gráfico de f .

Observación. Si (c, f(c)) es un punto de inflexión del gráfico de f, entonces por el teorema anterior, f ''(c) no puede ser ni negativa ni positiva; luego tenemos dos posibilidades: f ''(c) = 0 o f ''(c) no existe. Por lo tanto cuando se buscan los puntos de inflexión, los "sospechosos" son aquellos puntos donde la segunda derivada es nula o donde no existe. Pero debe tenerse cuidado puesto que no todos los "sospechosos son culpables".

Teorema. Prueba de la segunda derivada

Suponga que la función f tiene derivada de orden dos en el intervalo abierto I que contiene al punto crítico c en el cual f '(c)=0. Entonces:

i) Si f ''(c)>0 , entonces f(c) es un valor mínimo relativo de f(x) en I

ii) Si f ''(c)<0 , entonces f(c) es un valor máximo relativo de f(x) en I

Ejemplo Trace la gráfica de $f(x) = 8x^5 - 5x^4 - 20x^3$ (tomado del texto de Edwards y Penney)

Solución Como $f'(x) = 40x^4 - 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x+1)(2x-3)$

Debido a que f es derivable en todo R, los puntos críticos son los que anulan la derivada. f '(x) = 0 implica que x = 0, x = -1 ó x = 3/2 . Estos tres puntos críticos separan al eje X en cuatro intervalos abiertos. En los que determinaremos el comportamiento creciente o decreciente de f, para ello usaremos el signo de f '(x).

(-∞ , -1)	x = -1	(-1, 0)	x = 0	(0, 3/2)	x = 3/2	(3/2, +∞)
f '(x) > 0		f '(x)< 0		f '(x)< 0		f '(x) > 0
f creciente		f decreciente		f decreciente		f creciente

De acuerdo al criterio de la primera derivada f(-1) = 7 es un máximo relativo y f(3/2) ≈ -32,06 es un mínimo relativo en x = 0 no se alcanza ningún extremo.

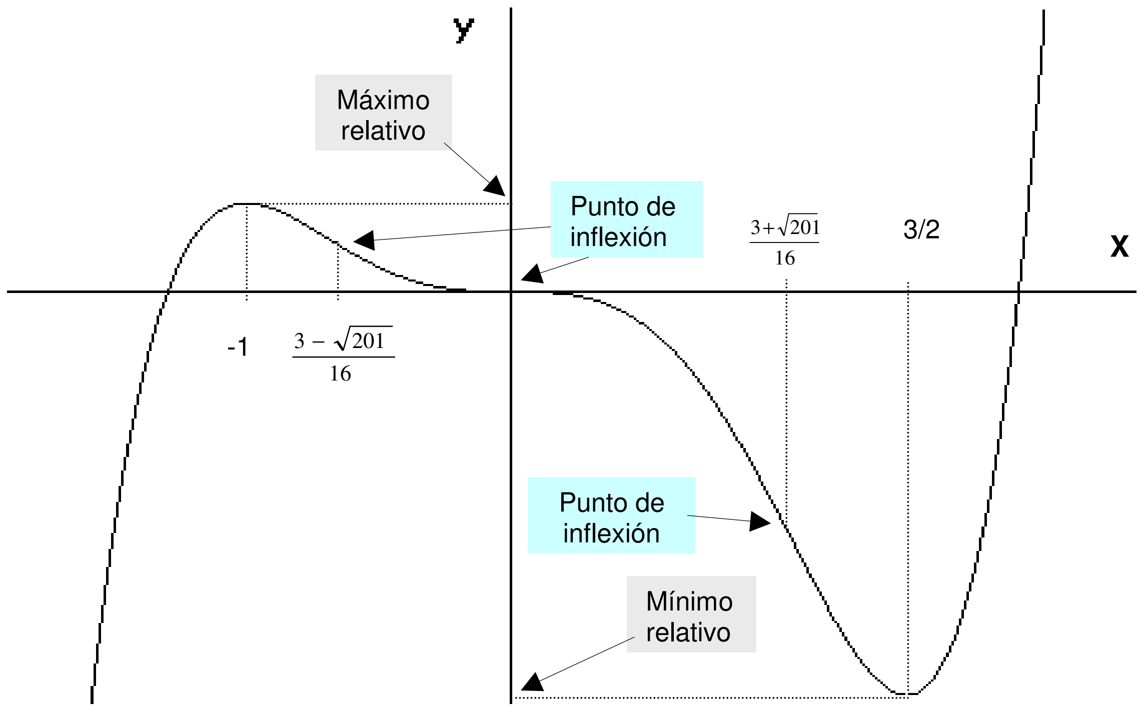
$f''(x) = 160x^3 - 60x^2 - 120x = 20x.(8x^2 - 3x - 6)$. Como f ''(x) existe para todo x en R , los posibles puntos de inflexión se producen en las soluciones de la ecuación f ''(x) = 0, es decir,

$$20x.(8x^2 - 3x - 6) = 0$$

Es claro que x = 0 es una solución, aplicando la fórmula de la ecuación cuadrática se obtiene $x = \frac{3 \pm \sqrt{201}}{16}$. Estos tres valores de x separan la recta real en cuatro intervalos, en los cuales estudiaremos el signo de f ’’(x), para determinar la concavidad de la curva y sus puntos de inflexión.

	$x=\frac{3-\sqrt{201}}{16}$		$x = 0$		$x=\frac{3+\sqrt{201}}{16}$	
f ’’(x) < 0		f ’’(x) > 0		f ’’(x) < 0		f ’’(x) > 0
Cóncava hacia abajo		Cóncava hacia arriba		Cóncava hacia abajo		Cóncava hacia arriba

Un



REGLAS DE L’HOPITAL

A) Sean f(x) y g(x) dos funciones derivables en un entorno (vecindad) del número a y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ entonces si existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, existirá $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \textit{siempre que} \quad g'(a) \neq 0$$

Demostración.

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$ por definición de derivada

$$= \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} \quad \text{por cociente de límites}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \quad \text{simplificando}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{pues f y g son derivables en a, por lo tanto continuas en a}$$

de manera que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = 0 \quad y \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a) = 0$

La Regla L'Hôpital también se puede aplicar cuando las funciones son derivables en R, y el límite es con x tendiendo a infinito, y también en los casos de límites laterales.

Ejemplo

Calcular $\text{Lim}_{x \to 0} \dfrac{sen(x)}{x}$ Este es un límite conocido donde se presenta la indeterminación 0/0, sabemos que su valor es 1. Pero lo resolveremos aplicando la regla de L'Hôpital

$$\text{Lim}_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = \text{Lim}_{x \to 0} \frac{cos(x)}{1} = 1$$

B) Supongamos que f y g son funciones continuas y derivables en todo x perteneciente a un entorno del número a, excepto en x=a y que $\text{Lim}_{x \to a} f(x) = \infty$, $\text{Lim}_{x \to a} g(x) = \infty$. Si

$\text{Lim}_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe entonces $\text{Lim}_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ también existe y además $\text{Lim}_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \text{Lim}_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Ejemplo

Calcular $\text{Lim}_{x \to 0^+} \dfrac{Ln(x)}{cot\, g(x)}$ En este caso se presenta la indeterminación ∞/∞, aunque se trata de un límite unilateral, se puede aplicar L'Hôpital

Solución

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{Ln(x)}{\cot g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\cos ec^2(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{sen^2(x)}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-sen^2(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2sen(x)\cos(x)}{1} = 0$$

Es también frecuente que cuando calculemos el límite del cociente de derivadas, obtengamos de nuevo una indeterminación; en este caso aplicamos otra vez la Regla de L'Hôpital.

Los otros casos de indeterminación del límite pueden ser tratados con L'Hôpital si previamente se transforman en indeterminación 0/0 o ∞/∞ . Veamos los siguientes ejemplos.

1.- Determine $\lim\limits_{x\to\infty} x.Ln\dfrac{x+2}{x-1}$

Solución Aquí se presenta una indeterminación $0.\infty$, por lo que lo se transforma en el limite de un cociente indeterminado 0/0 y luego se aplica la regla de L'hopital

$$\lim_{x\to\infty} x.Ln\frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{Ln\dfrac{x+2}{x-1}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x-1}{x+2}.\dfrac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)^2}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-3}{(x+2)(x-1)}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2+x-2} = 3$$

2.- Supóngase que se quiere calcular el límite de una expresión $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ donde $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ son tales que se presenta una de las siguientes formas indeterminadas $\mathbf{0^0}$, $\mathbf{1^\infty}$, $\mathbf{\infty^0}$. Cualquiera sea el caso, se aplica previamente logaritmo natural . Como $Ln[f(x)]^{g(x)} = g(x).Ln[f(x)]$, la indeterminación se transforma en $0.\infty$, de manera que podemos usar la estrategia del ejemplo anterior.

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{Ln\left[\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to a} Ln\left[[f(x)]^{g(x)}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x).Ln[f(x)]} = e^L$$

donde $L = \lim\limits_{x\to a} g(x).Ln[f(x)]$ el cual se puede calcular aparte.

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Ejemplo

Una industria de plástico recibe un pedido de 6000 pipotes. La compañía cuenta con 12 máquinas que pueden adaptarse para este tipo de producción, a un costo de adaptación de 3000 Bs. por máquina; una vez adaptadas, cada máquina produce 200 unidades diarias y todas ellas trabajan automáticamente necesitando sólo un operador que gana 6400 Bs. diarios. Si se quiere minimizar el costo, ¿cuántas máquinas deben adaptarse?. ¿En cuántos días se producirán los 6000 pipotes?

Solución:

Costo = costo de adaptación + salarios

Si x es el número de máquinas que deben adaptarse, entonces

El costo de adaptación de las máquinas es: 3000x

La producción diaria de pipotes es: 200x

El número de días para producir los 6000 pipotes es: $\dfrac{6000}{200x} = \dfrac{30}{x}$

El gasto en salario es: $\dfrac{30}{x}(6400) = \dfrac{192000}{x}$

Luego el costo en función del número de máquinas adaptadas está dado por:

$$C(x) = 3000x + \frac{192000}{x} \qquad \text{donde } x>0$$

Hallemos el mínimo de esta función

$$C'(x) = \frac{3000(x^2-64)}{x^2}$$

$C'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3000(x^2-64)}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2 = 64$ 0 $\Leftrightarrow$ $x= 8 \vee x=-8$, se descarta el valor -8

Analicemos el caso x=8, $C''(x)= \frac{384000}{x^3}$ y $C``(8)>0$

Luego C(x) tiene un mínimo relativo en x=8, este mínimo relativo es también absoluto (verificar)

El número de días para producir los 6000 pipotes es $^{30}/_{8}$ aproximadamente 4 días

Sugerencia: Los problemas como el ejemplo anterior, donde se piden maximizar o minimizar una variable relacionada a una situación que se describe en el problema pueden ser resueltos siguiendo un procedimiento semejante al planteado en la página 182 del texto *Cálculo (octava edición) de PURCELL y otros*

Ejemplo

El costo de producir x artículos de una mercancía es $C(x)= 0.5x^2+2x+200$ Bs. Se sabe que t horas después de iniciada la producción el número de artículos producidos es $x=t^2+20t$.

a) Hallar la razón de cambio del costo respecto al tiempo
b) Hallar la razón de cambio respecto al tiempo, 2 horas después de iniciada la producción

a) Nos piden hallar $\frac{dC}{dt}$ Bien $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx}.\frac{dx}{dt} = (x+2)(2t+20) = (t^2+20t+2)(2t+20)$

b) $\frac{dC}{dt}(2) = (2^2+20.2+2)(2.2+20) = 46.24 = 1104$ Bs/h

Ejercicios propuestos

1.- La potencia eléctrica (en vatios) en un circuito de corriente continua con dos resistencias R_1 y R_2, conectadas en serie, es $P = \frac{vR_1R_2}{(R_1+R_2)^2}$ donde v es el voltaje. Si v y R_1 se mantienen constantes, ¿qué resistencia R_2 produce la máxima potencia?

2.- La resistencia eléctrica en ohm de cierto tipo de material es $R = \sqrt{0.001T^4 - 4T + 100}$ donde T representa la temperatura en grados Celsius. Determinar la resistencia mínima del material.

3.- Utilizando láminas de hojalata, se desea fabricar envases cilíndricos cerrados, con capacidad ¼ de litro, determine la altura y el radio de la lata para utilizar la menor cantidad de material en la fabricación de cada envase.

4.- Resuelva el ejercicio anterior suponiendo que las latas se fabrican sin tapa en vez de cerradas.

5.- En relación con el ejercicio 5, suponga que el precio del material con que se fabrica el fondo y la tapa es el doble del precio del material usado en el cilindro. Determine el radio y la altura de la lata para minimizar los costos.

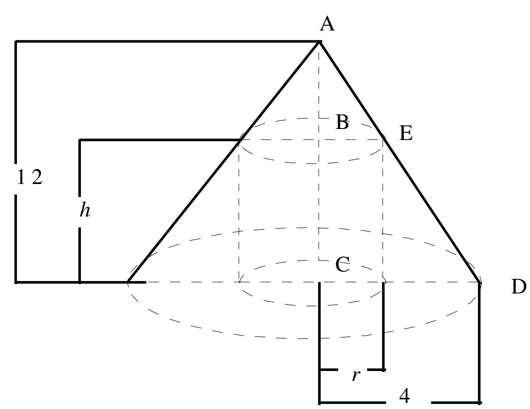
6.- Una caja sin tapa va a fabricarse cortando cuadrados iguales de cada esquina de una lámina cuadrada de 12 centímetros de lado, doblando luego hacia arriba los lados. Encontrar la longitud del lado del cuadrado que debe recortarse para que el volumen de la caja sea máximo?. ¿Cuál es el volumen máximo?

7.- Un generador de corriente directa tiene una fuerza electromotriz de E volts y una resistencia interna de r ohm, donde E y r son constantes. Si R ohm es la resistencia externa conectada a la máquina, la resistencia total es (r + R) ohm y si P en vatios es la potencia, entonces

$$P = \frac{E^2 R}{(r+R)^2}$$

Demuestre que el consumo máximo de potencia se presenta cuando la resistencia externa es igual a la interna

8.- Un cilindro circular recto de radio r y de altura h está inscrito en un cono de altura 12 cm y radio de la base 4 cm, como se muestra en la figura. Encuentre las dimensiones del cilindro de máximo volumen que pueda inscribirse en el cono.



9.- Una fuerza electromotriz decadente $E= 200e^{-5t}$ se conecta en serie con una resistencia de 20 ohm y un condensador de 0.01 faradios. Asumiendo Q=0 en t=0, se puede deducir que $Q = 10te^{-5t}$. Sabiendo que la intensidad $I = \frac{dQ}{dt}$. Encuentre la corriente en cualquier tiempo. Demuestre que la carga alcanza un máximo, calcúlelo y halle cuándo se obtiene.

10.- Durante la temporada navideña, una empresa compra calcetines baratos de fieltro rojo, les pega imitación de piel blanca y lentejuelas y los empaca para su distribución. El costo total de producir q cajas de esos calcetines está dada por

$$c = 3q^2 + 50q - 18q\ln q + 120$$

Encontrar el número de cajas que deben prepararse para minimizar el costo promedio por caja. Determinar (con dos decimales) este costo promedio mínimo.

11.- Un cartel rectangular de cartón debe tener 150 centímetros cuadrados para material impreso; márgenes de 3 centímetros arriba y abajo y de 2 centímetros a cada lado. Encontrar las dimensiones del cartel de manera que la cantidad de cartón que se use sea mínima.

12.- Un fabricante ha determinado que, para cierto producto, el costo promedio por unidad está dado por $c = 2q^2 - 36q + 210 - \dfrac{200}{q}$, donde $2 \le q \le 10$:

a) ¿A qué nivel dentro del intervalo $[2,10]$ debe fijarse la producción para minimizar el costo total?. ¿Cuál es el costo total mínimo?
b) Si la producción tuviese que encontrarse dentro del intervalo $[5,10]$, ¿qué valor de q minimizará el costo total?

13.- El propietario de un terreno de forma rectangular de 1000 metros cuadrados de área quiere cercarlo y dividirlo en cuatro lotes iguales, con tres cercas paralelas a uno de los lados extremos. ¿Cuál es el número mínimo de metros de cerca necesarios?

14.- Antonio, se encuentra en un bote de remos a 1 Kilómetro del punto mas cercano B en la orilla de una costa rectilínea, recibe una llamada urgente y debe dirigirse de inmediato a su casa, que se encuentra en la playa a 3 Km del punto B. El sabe que puede remar a 5 Km/h y correr a 8 Km/h. ¿ Qué estrategia debe seguir para llegar lo más rápido posible a su casa?