UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DE GUAYANA
VICE-RECTORADO ACADEMICO
DEPARTAMENTO DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
AREA DE MATEMATICAS

GUIA DE MATEMATICAS I

Prof. Orlando Baisdem Pérez

Puerto Ordaz, Abril del 2010.

Capítulo 1

Sistema de Numeración-Plano Cartesiano

1.1 Los Números Reales

Definición 1.1 *Los números reales se definen de manera axiomática como el conjunto de números que se encuentran en correspondencia biunívoca con los puntos de una recta infinita: la recta numérica. El conjunto de los números reales se le simboliza con la letra R.*

Repasemos lods diferentes tipos de números que conforman el sistema de los números reales.
Empezemos con los **números naturales**:$1, 2, 3, 4$,....
Los enteros son los números naturales, junto con los negativos y el cero:....,$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$...
Construimos los números racionales mediante razones entre números enteros. Así, cualquier número racional r se puede expresar como:

$$r = \frac{m}{n}$$

donde m y n son enteros y $n \neq 0$
. Ejemplos de esto son:

Ejemplo 1 $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{7}$, $46 = \frac{46}{1}$, $0.17 = \frac{17}{100}$

Recuerde que la división 0 no es valida en ningún caso, por lo que las expresiones $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ están indefinidas). También existen números reales, como $\sqrt{2}$, que no se expresan como una razón entre números enteros,por lo tanto, se conocen como **números irracionales**. Se puede demostrar, con diversos grados de dificultad, que cada uno de los números siguientes es también un número irracional:
$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, π, $\frac{3}{\pi^2}$
La siguiente figura muestra la clasificación de los números reales

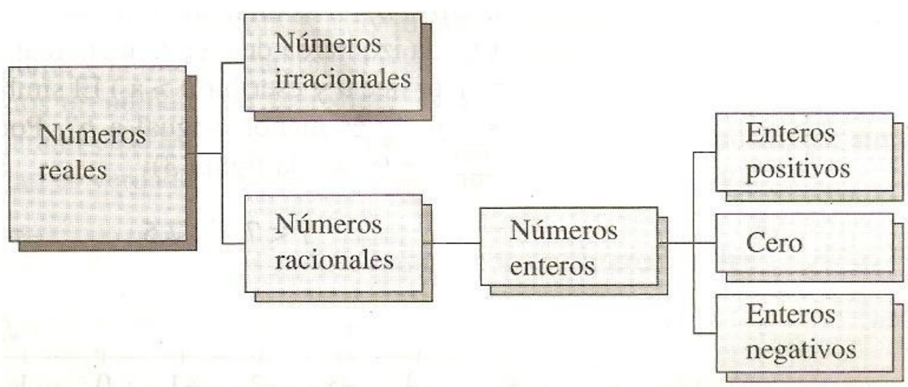

Figura 1.1: Clasificación de los numeros reales Fuente: tomado de Stewart (2004)

1.1.1 La recta real

Definición 1.2 *La recta real es una representación geométrica del conjunto de los números reales. Tiene su origen en el cero, y se extiende en ambas direcciones, los positivos en un sentido (normalmente hacia la derecha) y los negativos en el otro (normalmente a la izquierda). Existe una correspondencia uno a uno entre cada punto de la recta y un número real.*

Esta recta numérica real o recta de coordenadas, se construye como sigue: se elige de manera arbitraria un punto de una línea recta para que represente el cero o punto origen. Se elige

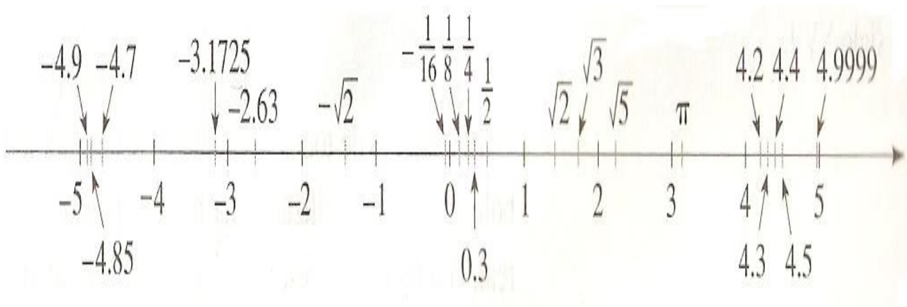

Figura 1.2: Representación de los números reales Fuente: tomado de Stewart (2004)

un punto a una distancia adecuada a la derecha del origen para que represente al número 1. Esto establece la escala de la recta numérica.

1.1.2 Conjuntos e Intervalos

Definición 1.3 *Un conjunto es una colección de objetos de características definidas, conocidos como los elementos del conjunto.*

Si S es un conjunto, la notación $\in$ significa que a es un elemento de S y significa que b no es un elemento de S. Por ejemplo, si Z representa el conjunto de los enteros, entonces $-3 \in Z$ pero $\pi \ni Z$.
Algunos conjuntos se pueden describir listando sus elementos entre llaves.Por ejemplo, el conjunto A formado por todoslos enteros positivos menores que 7 se puede escribir como:
A$= 1, 2, 3, 4, 5, 6$
También podriamos escribir A en **notación constructiva de conjuntos** en la forma:

$$A = x \in Z/0 < x < 7$$

que se lee "A es un conjunto de todas las x tal que x sea un entero mayor que 0 y menor que 7".
Si S y T son conjuntos, entonces su **unión** $S \cup T$ es el conjunto constituido por todos los

elementos que están en S o en T (o en ambos). La **intersección** de S y T es el conjunto $S \cap T$ formado por todos los elementos que están tanto en S como en T. En otras palabras $S \cap T$ es la parte común de S y T. El **conjunto vacio** denotado como $\emptyset$ es el conjunto que no contiene ningún elemento.

Ejemplo 2 *Si* $S = 1, 2, 3, 4, 5$, $T = 4, 5, 6, 7$ *y* $V = 6, 7, 8$, *obtenga los cojuntos* S, S *y* S.

Solución:
$S = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$
$S = 4, 5$
$S = \emptyset$

Intervalos

Ciertos conjuntos de números reales conocidos como intervalos , se presentan con frecuencia en el cálculo y geométricamente corresponden a segmentos de rectas. Por ejemplo si $a < b$ entonces el **intervalo abierto** desde a hasta b esta integrado por todos los números entre a y b (sin incluir los extremos) y se denota el simbolo (a, b). Utilizando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir:
$(a, b) = x|a < x < b.$
El **intervalo cerrado** de a a b es el conjunto
$[a, b] = x|a < x < b.$
Necesitamos considerar también intervalos infinitos, como: $(a, \infty) = x|x < a.$
Esto no significa que el ∞ (infinito) sea un número. La notación (a, ∞) corresponde al conjunto de todos los números que son mayores que a, por lo que el simbolo ∞ simplemente indica que el intervalo se extiene de manera indefinida en la dirección positiva.
La siguiente tabla lista los nueve tipos posibles de intervalos. Cuando éstos se analicen, siempre supondremos que $a < b$.

Notación	Descripción del conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	a b
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	a b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	a b
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	a
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	a
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	b
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

Figura 1.3: Intervalos Fuente: tomado de Stewart (2004)

1.2 Inecuaciones en R

Definición 1.4 *Desigualdad: es un enunciado matemático que relaciona dos expresiones a través de los simbolos:* $<, >, \leq, \geq$.
Por tanto, las desigualdes tienen una de las siguientes formas:
$a < b, a > b, a \leq b, a \geq b$.

Las desigualdes que no incluyen el simbolo igual se denominan **estrictas** y las que lo incluyen, se denominan **no estrictas**.

Propiedades de las desigualdades

1. Si en una desigualdad se intercambian las expresiones que la forman, el sentido de la desigualdad se invierte.
   $p > q \rightarrow q < p$.

2. Si p es mayor que q y éste a su vez es mayor que r, entonces se cumple que p es mayor que r (propiedad transitiva)
   $p > q$ y $q > r \rightarrow p > r$.

3. Si a ambos miembros de una desigualdad, se le suma una expresión r, la desigualdad no se altera.

$p > q \rightarrow p + r > q + r$

4. Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por un mismo positivo, la desigualdad no se altera.
   $p > q$ y $r \in \mathbb{R}^+ \rightarrow pr > qr$

5. Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por un mismo número negativo, la desigualdad invierte su sentido.
   $p > q$ y $r \in \mathbb{R}^- \rightarrow pr < qr$

6. Si p y q son números reales no nulos y del mismo signo, tales que $p > q$, entonces se cumple que el inverso de p es menor que el inverso de q. $p > q \rightarrow \frac{1}{p} < \frac{1}{q}$

7. Si ambos miembros de una desigualdad son positivos y se elevan a la misma potencia entera positiva, la desigualdad no se altera.
   $p > q \rightarrow \mathrm{p}^n > q^n$ y $p < q \rightarrow \mathrm{p}^n < q^n$; con p,q$\in \mathbf{R}^+$,n $\in Z^+$

Definición 1.5 *Una inecuación es una desigualdad con una o más variables. Son ejemplos de inecuaciones en una variable:* $2x + 5 > 0$*;* $tg^2x - 2secx \geq 1$ *y en dos variables, son ejemplos:* $2y - 3x + 1 < 0$*;* $y \geq x^2 - 5x + 6$*.*

Observacion 1 *Las inecuaciones cambian de sentido al multiplicar sus miembros por un mismo número negativo*

1.2.1 Inecuación Lineal de Primer Grado

Definición 1.6 *Es toda inecuación que, a través de la aplicación de las propiedades, pueda llevarse a una de las formas siguientes (con* $a \neq 0$ *y* $a, b \in \mathbb{R}$*):*

$ax+b>0$; $ax+b<0$; $ax+b\geq 0$; $ax+b\leq 0$

Ejemplo 3 *Resolver las siguientes inecuaciones lineales*

1. $-2x+5\geq -3$
2. $\frac{(x-1)^3}{3}\geq \frac{x^2}{3}+\frac{7x}{2}-8$

Solución

1. $-2x+5\geq -3$→-2x$\geq -3-5$
   $-2x\geq -8$→2x≤ 8
   $x\leq 4\rightarrow$ **Solución**(-$\infty, 4]$

2. $\frac{(x-1)^3}{3}\geq \frac{x^2}{3}+\frac{7x}{2}-8$
   Desarrollando el producto notable y realizándo las operaciones aritméticas del caso obtenemos:
   $2x^2-4x+2\geq 2x^2+21x-48$
   Transponiendo términos y simplificando: $2x^2-2x^2-4x-21x\geq -48-2$
   $-25x\geq -50$
   Multiplicándo ambos miembros de la desigualdad por -1 y despejando la variable X, se obtiene:
   $25x\leq 50$; $x\leq 2$
   El conjunto solución es entonces el intervalo $(-\infty, 2]$

1.2.2 Inecuaciones cuadráticas

Definición 1.7 *Son aquellas que mediante la aplicación de las propiedades pueden llevarse a una de las formas siguientes (con $a\neq 0; a,b,c\in\mathbb{R}$)*
$ax^2+bx+c>0$; $ax^2+bx+c<0$; $ax^2+bx+c\geq 0$ $ax^2+bx+c\leq 0$

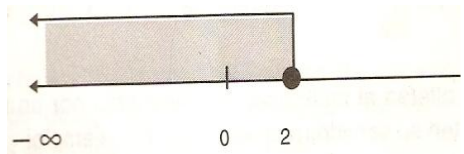

Figura 1.4:

Algoritmo de resolución:

1. Factorizar el polinomio
2. Ubicar las raices reales sobre la recta
3. Determinar el signo de cada binomio en los distintos intervalos que se originan; para ello se le asignará a la variable un valor arbitarrio pertenenciente a cada uno de los intervalos.
4. Determinar que signo le corresponde al producto de los binomios en cada uno de los intervalos anteriores.
5. Seleccionar los intervalos donde el signo del productop satisfaga la desigualdad. El conjunto solución es la unión de los mismos.

Ejemplo 4 *Resolver las siguientes inecuaciones cuadráticas*

1. $x^2 - x - 6 \leq 0$

2. $-x^2 + 8 \leq 0$

Solución

1. $x^2 - x - 6 \leq 0$ Factorizando queda: $(x-3)(x+2) \leq 0$
   Ubicando las raices 3 y -2 sobre la recta real y asignándole un valor arbitrario a la

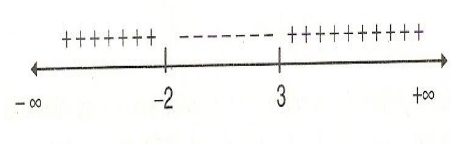

Figura 1.5:

variable X en cada uno de los intervalos, se determina el signo del polinomio $(x-3)(x+2)$ y se obtiene:

La solución de la inecuación esta representada por los intervalos en los cuales el polinomio tiene valor numérico cero ó es negativo. Por lo tanto:
$S = [-2, 3]$

2. $-x^2 + 8 \geq 0$
   Multiplicando ambos miembros de la inecuación por -1 e invirtiendo el sentido de la desigualdad:
   $x^2 - 8 \geq 0$
   Factorizándo y simplificándo queda:
   $(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}) \geq 0$
   $(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) \geq 0$
   Ubicándo las raices sobre la recta real y estudiando el signo de cada binomio en los intervalos respectivos, se obtiene la variación de signos producto de ambos binomios así:

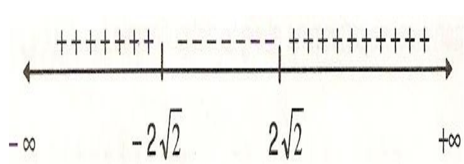

Figura 1.6:

Es fácil observar que el polinomio se comporta positivamente en los intervalos de los extremos por lo que el conjunto solución de la inecuación dada es la unión de ambos intervalos , incluyendo las raices puesto que la inecuación no es estricta. Es decir:
S= $(-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, +\infty)$

1.2.3 Inecuaciones racionales

Definición 1.8 *Son aquellas que, mediante los cambios apropiados, pueden reducirse a una de las formas siguientes:*

en donde Q(x)(debe ser diferente de cero) es polinomio de grado mayor o igual que uno. Para resolver inecuaciones racionales, se procede de la siguiente forma:

1. *Factorizar el polinomio*
2. *Ubicar las raices reales sobre la recta*
3. *Realizar el análisis de variación de signos de cada polinomio en cada uno de los intervalos formados.*
4. *Determinar los intervalos en donde el cociente $P(x) : Q(x)$ tome los valores que satisfagan la desigualdad inicial.*
5. *Unir los intervalos así obtenidos a fin de obtener el conjunto solución*

Ejemplo 5 *Resolver las siguientes inecuaciones racionales*

1. $\frac{(x-1)}{(x+2)} > 0$
2. $\frac{x^4-x^2}{x^7-x^3} \leq 0$

Solución

1. $\frac{(x-1)}{(x+2)} > 0$ *Ubicando las* 1 *raices y* -2 *y construyendo la matriz de signos correspondiente, se obtiene:*

$-\infty \qquad -2 \qquad 1 \qquad +\infty$

P(x) = x – 1	– – – – – –	– – – – – –	+ + + + + +
Q(x) = x + 2	– – – – – –	+ + + + + +	+ + + + + +
P(x) / Q(x)	+	–	+

Figura 1.7:

La solución de esta inecuación está representada por la unión de los intervalos en los cuales el cociente es positivo. Según la última fila de la tabla esto da como resultado:
S$= (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$
Los extremos de los intervalos no se incluyen en la solución ya que la desigualdad es estricta.

2. $\frac{x^4-x^2}{x^7-x^3} \leq 0$ *Factorizándo cada polinomio se obtiene:* $\frac{x^2(x-1)(x+1)}{x^3(x^2+1)(x-1)(x+1)} \leq 0$

De inmediato se observa la posibilidad de simplificar factores, es decir:
$\frac{x^2(x-1)(x+1)}{x^3(x^2+1)(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x(x^2+1)} \leq 0$

Analizándo $\frac{1}{x(x^2+1)} \leq 0$ *concluimos que la solución es*
$S = (-\infty, 0)$

1.2.4 Inecuaciones Irracionales

Definición 1.9 *Son aquellas inecuaciones en donde la variable aparece dentro de un radical. Consideramos inecuaciones irracionales a cualquiera de las formas siguientes:*
$\sqrt[n]{P(x)} > Q(x)$; $\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x)$; $\sqrt[n]{P(x)} \leq Q(x)$; $\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x)$;

Analizaremos los casos en que el índice de la raíz sea impar o par

1. ***Cuando el índice es impar:*** *En este caso,* $\sqrt[n]{P(x)}$ *siempre estará definida y no es necesario efectuar ninguna restricción al polinomio* $P(x)$*. Por lo tanto, basta elevar ambos miembros de la inecuación a un número igual al índice de la raíz y obtenemos*

siempre una inecuación equivalente a la nada, que sabemos tiene el mismo conjunto solución

Ejemplo 6 *Resolver las siguientes inecuaciones irracionales*

(a) $\sqrt[3]{x^2 - 3x + 4} > 2$

(b) $\sqrt[5]{\frac{2x-1}{x+2}} - \sqrt[5]{x-3} \leq 0$

Solución

(a) $\sqrt[3]{x^2 - 3x + 4} > 2$ *Elevando al cubo, factorizándo y realizándo el estudio de signos de los intervalos obtenidos, se tiene como resultado:*

$$x^2 - 3x + 4 > 8x^2 - 3x - 4 > 0(x+1)(x-4) > 0$$

De donde:

$S = (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

(b) $\sqrt[5]{\frac{2x-1}{x+2}} - \sqrt[5]{x-3} \leq 0$ *Trasponiendo términos y elevando a la quinta potencia, se obtiene la inecuación equivalente:*

$$(\sqrt[5]{\frac{2x-1}{x+2}})^5 \leq (\sqrt[5]{x-3})^5 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+2} \leq x - 3$$

Realizándo las operaciones adecuadas, obtiene:

$$\frac{x^2 - 3x - 5}{x+2} \geq 0$$

Al resolver la inecuación por los métodos ya conocidos, nos queda la solución siguiente:

$$S = (-2, \frac{3-\sqrt{29}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{29}}{2}, \infty)$$

2. ***Cuando el índice es par:*** *En este* $\sqrt[n]{P(x)}$ *esta definida sólo cuando la cantidad subradical sea posito cero. Entonces, tenemos la inecuación (i)* $P(x) \geq 0$*, que condice a*

la solución S_1. Para eliminar la raíz, debemos elevar ambos miembros de la inecuación a una potencia par, igual al índice de la raíz y obtenedremos una inecuación equivalente a la dada, ***sólo en el caso de que ambos miembros de la desigualdad inicial sean no negativos****. Así se obtiene la inecuación (ii) $P(x) \geq [Q(x)]^n$ que conduce a la solución S_1. El conjunto solución de la inecuación dada es la intersección de las soluciones de las inecuaciones (i) y (ii). Es decir: $S_g = S_1 \cap S_2$*

Ejemplo 7 *Resolver las siguientes inecuaciones irracionales*

(a) $\sqrt{4-x} + \sqrt{8-x} \geq 6$

(b) $\sqrt{-x^2+x+2} > x-4$

Solución

(a) $\sqrt{4-x} + \sqrt{8-x} \geq 6$ *Para que esté definida, necesario que $4-x \geq 0$ y $8-x \geq 0$, es decir, que se cumpla simultáneamente $x \leq 4$ y $8-x \geq$. Esto nos conduce al intervalo intersección $S_1 = (-\infty, 4]$.*
Como ambos miembros de la inecuación son positivos podemos elevar al cuadrado y obtener la ineacuación equivalente, ya simplificada:

$$\sqrt{x^2-5x-1} > x + 12(B)$$

Nuevamente, para que esta inecuación esté definida, se debe cumplir $x^2 - 12x + 32 \geq 0$ cuyo conjunto solución es $S_2 = (-\infty, 4] \cup [8, \infty)$. Elevando ambos miembros de la ineacuación (B) al cuadrado, se obtiene:

$$-36x > 112 \Rightarrow x < -\frac{28}{9}$$

El conjunto solución es $S_3 = (-\infty, -\frac{28}{9})$. Por tanto, la solución de la ineacuación dada es:

$$S_g = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (-\infty, -\frac{28}{9})$$

(b) $\sqrt{-x^2+x+2} > x-4$ *Como el índice de la raíz es par, debe cumplirse:*

$$-x^2+x+2 \geq 0x^2-x-2 \leq 0$$

El conjunto solución es $S_1 = [-1,2]$. *Es fácil ver que el miembro derecho de la ineacuación inicial es negativo para todo* $x < 4$ *y en particular para todo* $x \in [-1,2]$*; por tanto, la desigualdad se cumple para cualquier valor de* x *y su solución es* $S_g = [-1,2]$. *No es posible elevar ambos miembros al cuadrado ya que el segundo siempre es negativo para los valores de existencia del polinomio que se encuentra en el interior del radical.*

1.2.5 Inecuaciones con valor absoluto

Valor absoluto

Definición 1.10 *El valor absoluto de un número real* x *es* $|x| = \{^{x, six \geq 0}_{-xsix<0}$

De la definición anterior se deriva que, todo número real es menor o igual que su modulo, es decir: $a \leq |a|$; $|a| \geq a$

Propiedades

1. $|a| = \sqrt{a^2}$
2. $|a+b| \geq |a| + |b|$
3. $|a-b| \leq |a| - |b|$
4. $|ab| = |a||b|$
5. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ *con* $b \neq 0$
6. $|x| < a \leftrightarrow x < a$ *y* $-x < a$
7. $|x| > a \leftrightarrow x > a$ *o* $-x > a$

Inecuaciones con valor absoluto

Estas inecuaciones adoptan alguna de las siguientes formas:

$|P(x)| < Q(x);|P(x)| \leq Q(x);|P(x)| > Q(x);|P(x)| \geq Q(x)$

Para resolver inecuaciones con valor absoluto, se aplica la definición de valor absoluto, la cual conducirá a dos inecuaciones cuyas soluciones serán S_1 y S_2 respectivamente. La solución general S_g de la inecuación modular depende del sentido de la desigualdad, así:

$$|P(x)| > Q(x) \Rightarrow S_g = S_1 \cup S_2 |P(x)| < Q(x) \Rightarrow S_g = S_1 \cap S_2$$

Ejemplo 8 *Resolver las siguientes inecuaciones con valor absoluto*

1. $|\frac{3x-1}{4} - \frac{x+1}{2}| < \frac{1}{6}$
2. $|x^2 - 5x - 1| \geq x^2 - 3|$

Solución

1. $|\frac{3x-1}{4} - \frac{x+1}{2}| < \frac{1}{6}$ *Operando ambos miembros encontramos* $|9x - 3 - 6x - 6| < 2$

   $|3x - 9| < 2$

   Aplicando la propiedad 6*, del valor absoluto se obtienen las dos ecuaciones:*

   $(i) 3x - 9 < 2$ *y* $(ii) - 3x + 9 < 2$

   Cuyas soluciones son respectivamente: $S1 = (-\infty, \frac{11}{3})$ *y* $S_2 = (\frac{7}{3}, \infty)$

   La solución general de la inecuación es la intersección de los intervalos anteriores. Es decir: $S_g = S_1 \cap S_2$

   Graficamente se tiene: La solución está representada por el intervalo doblemente som-

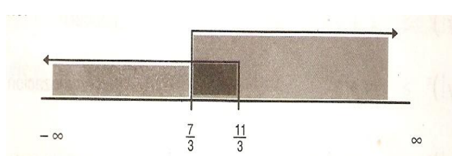

Figura 1.8:

   breado, es decir: $S_g = (\frac{7}{3}, \frac{11}{3})$

2. $|x^2 - 5x - 1| \geq x^2 - 3|$

Solución

Aplicándo la propiedad 7 del valor absoluto se obtienen las inecuaciones:

$$(i) x^2 - 5x - 1 \geq x^2 - 3 (ii) - (x^2 - 5x - 1) \geq x^2 - 3$$

Multiplicamos la inecuación (ii) por -1*, para obtener*

$$x^2 - 5x - 1 \leq -x^2 + 3$$

Se generan las inecuaciones equivalentes:

$$(i) x \leq \frac{2}{5}$$

$$(ii)(x - \frac{5 + \sqrt{57}}{4})(x - \frac{5 + \sqrt{57}}{4}) \leq 0$$

Cuyas soluciones son respectivamente:

$S_1 = (-\infty, \frac{2}{5})$

$S_2 = [\frac{5-\sqrt{57}}{4}, \frac{5+\sqrt{57}}{4}$

y la solución general de la inecuación es:

Graficamente se tiene:

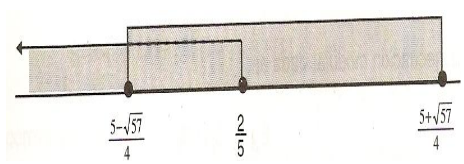

Figura 1.9:

$$S_g = (-\infty, \frac{2}{5}] \cup [\frac{2}{5}, \frac{5 + \sqrt{57}}{4}]$$

$$S_g = (-\infty, \frac{5+\sqrt{57}}{4}]$$

Resolver los siguientes inecuaciones

1. $\frac{x^2-2x-3}{x-1} \leq 0$
2. $\frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x+3} \geq 1 + \frac{x}{x+2}$
3. $|x^2-3x-5| < |x^2+6|$
4. $\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}(x-2) > \frac{3-x}{6}$
5. $12x^2 - 20x + 5 \leq 0$
6. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x-3}$
7. $\frac{|x^2-2|}{x} \geq |x-3|$
8. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} \leq 3$
9. $\sqrt[3]{3x^2+x-1} < \sqrt[3]{x^2+1}$
10. $\sqrt[3]{\frac{x^3-1}{4x^2-1}}$

1.3 El Plano Cartesiano

Definición 1.11 *Es un instrumento eficaz para explorar relaciones entre números: Con cada par de números reales x e y formamos un* ***par ordenado*** *(x,y). Visualizamos el par (x,y) como un puntoen dos dimensiones. Elplano cartesiano tiene dos rectas numéricas perpendiculares. La horizontal se llama eje x, la vertical eje y. El punto de intersección es el origen que corresponde al par* $(0,0)$.

Para representar el par $(1,2)$*, partimos del origen, avanzamos* 1 *unidad a la derecha,* 2 *unidades hacia arriba y marcamos el punto* $(1,2)$.

Ejemplo 9 *Dejamos caer un objeto desde lo alto de un edificio y anotamos la distancia recorrida en diversos instantes, como muestra la tabla:*

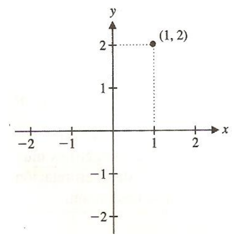

Figura 1.10: Plano Cartesiano

Tiempo (seg)	*0*	*0.5*	*1*	*1.5*	*2*
Distancia (pies)	*0*	*4*	*16*	*36*	*64*

Representar los puntos en el plano cartesiano y discutir las pautas que se perciben.

Solución

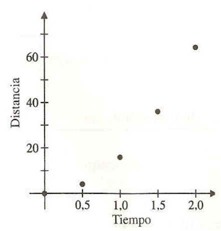

Figura 1.11: Puntos representados en el plano cartesiano

1.3.1 Distancia entre dos puntos

La formula de la distancia entre dos en el plano cartesiano es consecuencia del teorema de Pitagoras.

Teorema 1.1 *La distancia entre los puntos* (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2) *en el plano cartesiano viene dad por:*

$$d(x_1, y_1), (x_2, y_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

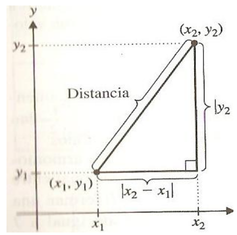

Figura 1.12: Un triangulo rectangulo

Aplicación de la fórmula de distancia

Ejemplo 10 *Calcular las distancias entre cada par de puntos* $(1, 2), (3, 4)$ *y* $(2, 6)$. *Determinar si estos tres puntos son vértices de un triángulo rectángulo.*

Solución

La distancia entre $(1, 2)$ *y* $(3, 4)$ *es*

$$d(1, 2), (3, 4) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

La distancia entre $(1, 2)$ *y* $(2, 6)$ *es*

$$d(1, 2), (2, 6) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

Finalmente, la distancia entre $(3, 4)$ *y* $(2, 6)$ *es*

$$d(3, 4), (2, 6) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

Los lados deben satisfacer el teorema de Pitágoras, es decir:

$$(\sqrt{8})^2 + (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{17})^2$$

Como esta igualdad no se cumple, el triángulo no es rectángulo

1.4 La Linea Recta

Definición 1.12 *Si A, B y C son constantes, con A y B diferentes de* 0*, y x y y son variables, entonces la gráfica de la ecuación:*

$$Ax + By = C$$

Forma estándar

es una línea recta. Cualquier línea recta es un sistema coordenado rectangular, tiene ecuación de esa forma.

1.4.1 Pendiente de una recta

Si una rectapasa por dos puntos distintos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, entonces su pendiente m está dada por la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$x_1 \neq x_2$

$$m = \frac{cambiovertical(elevación)}{Cambiohorizontal(desplazamiento)}$$

Ejemplo 11 *Trace una recta que una los pares de puntos indicados y encuentre su pendiente.*

1. $(-3, -4), (3, 2)$
2. $(-2, 3), (1, -3)$
3. $(-4, 2), (3, 2)$

4. $(2,4),(2,-3)$

Solución

1. $(-3,-4),(3,2)$
$$m=\frac{2-(-4)}{3-(-3)}=\frac{6}{6}=1$$
2. $(-2,3),(1,-3)$
$$m=\frac{-3(-3)}{1-(-2)}=\frac{-6}{3}=2$$
3. $(-4,2),(3,2)$
$$m=\frac{2-2}{3-(-4)}=\frac{0}{7}=0$$
4. $(2,4),(2,-3)$
$$m=\frac{-3-4}{2-2}=\frac{-7}{0}$$
La pendiente no está definida

Forma pendiente intersección

Teorema 1.2
$$y=mx+b$$

$$m=\frac{Elevación}{Desplazamiento}=pendiente$$
$m = Interseccióncon el eje\ y$

Ejemplo 12 *Uso de la forma pendiente-intersección*

1. *Escriba la ecuación de la forma pendiente intersección de una recta con una pendiente de $\frac{2}{3}$ e intersección con el eje y de -5.*

2. *Encuentre la pendiente y la intersección y después haga la gráfica de* $y = -\frac{3}{4}x - 2$

Solución:

1. *Sustituya* $m = \frac{2}{3}$ *y* $b = -5$ *en* $y = mx + b$ *para obtener* $y = -\frac{2}{3}x - 5$
2. *La intersección con el eje* $y = -\frac{3}{4}x - 2$ *es* -2*, así que el punto* $(0, -2)$ *está en la gráfica. La pendiente de la recta es* $-\frac{3}{4}$*, de modo que, cuando la coordenada* x *de* $(0, -2)$ *aumenta cuatro unidades (desplazamiento), la coordenada* y *cambia por* -3*. El punto resultante es* $(4, -5)$*.*

Teorema 1.3 Forma punto-pendiente
Una ecuación de una recta que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$ *con pendiente* m *es*

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

La forma punto-pendiente es muy útil, ya que permite encontrar la ecuación de una recta si se conoce lpendiente y las coordenadas de un punto sobre la recta, o si se conocen las coordenadas de dos puntos sobre la recta. En este último caso, se encontrará primero la pendiente utilizándolas coordenadas de los dos puntos de la recta; después se usa la forma punto-pendiente con cualesquiera de los dos puntos dados.

Ejemplo 13 1. *Encuentre una ecuación para la recta que tenga pendiente* $\frac{2}{3}$ *y pase por el punto* $(-2, 1)$*. Escriba la respuesta final en la forma estándar* $Ax + By = C$*.*

2. *Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $(4, -1)$ *y* $(-8, 5)$*. Escriba la resfinal en la forma pendiente-intersección* $y = mx + b$

Solución:

1. *Sea* $m = \frac{2}{3}$ *y* $(x_1, y_1) = (-2, 1)$*. Entonces*

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x - (-2))$$

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x + 2)$$
$$3y - 3 = 2x + 4$$
$$-2x + 3y = 7$$

ó

$$2x - 3y = -7$$

2. *Encuentre primero la pendiente de la recta usando la fórmula de la pendiente:*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - (-1)}{-8 - 4} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$$

Ahora deje que (x_1, y_1) *sean cualquiera de los dos puntos dados y proceda como en la part A, eligiendo* $(x_1, y_1) = (4, -1)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-1) = -\frac{1}{2}(x - 4)$$
$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 4)$$
$$y + 1 = -\frac{1}{2}x + 2$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

Se debe verificar que usando $(-8, 5)$ *el otro punto dado, se produce la misma ecuación.*

Teorema 1.4 Rectas horizontales y verticales

Ecuación:

$x = a$ *(versión corta para* $x + 0y = a$*)*

Gráfica:*Recta vertical que pasa por* $(a, 0)$ *(La pendiente está indefinida)*

Ecuación:

$y = b$ *(versión corta para* $0x + y = b$*)*

Gráfica:*Recta horizontal que pasa por* $(0, b)$ *(La pendiente es cero)*

Ejemplo 14 *Gráfique la recta $x = -2$ y la recta $y = 3$*

Solución

Rectas paralelas y perpendiculares

De acuerdo con la geometría, dos rectas verticales son paralelas entre sí, y una recta horizontal y una vertical perpendiculares una con respecto a la otra ¿Cómo se le podría llamar entonces a dos rectas no verticales cuando son paralelas o perpendiculares entre sí? El siguiente teorema proporciona una evaluación conveniente.

Teorema 1.5 Rectas paralelas y perpendiculares

Dadas dos rectas no verticales L_1 y L_2 con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, entonces:
$L_1 || L_2$ *si y solo sí* $m_1 = m_2$
$L_1 \perp L_2$ *si y solo sí* $m_1 * m_2 = -1$

Los simbolos $||$ y $\perp$ significan, respectivamente, "es paralela a"y "es perpendicular a". En el caso de perpendicularidad, las condiciones $m_1 m_2 = -1$ también pueden escribirse como:
$m_2 = -\frac{1}{m_1}$ *ó* $m_1 = -\frac{1}{m_2}$
Así: ***Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son las recíprocas negativas de cada una.***

Ejemplo 15 *Hallar la forma general de las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(2, -1)$ y son:*

1. *Paralela a la recta $2x - 3y = 5$*

2. *Perpendicular a la recta $2x - 3y = 5$*

Solución *Al escribir la ecuación lineal $2x - 3y = 5$ en forma punto-pendiente $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$, se ve que la recta dada tiene pendiente $m = \frac{2}{3}$.*

1. *La recta que pasa por $(2, -1)$ y es paralela la recta dada tiene también pendiente.*

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y-(-1)=\frac{2}{3}(x-2)$$
$$3(y+1)=2(x-2)$$
$$2x-3y-7=0$$

Observar la similitud con la ecuación original

2. *Calculando el opuesto o el negativo del inverso de la pendiente de la recta dada, se determina que la pendiente de toda recta perpendicular a la inicial es* $-\frac{3}{2}$. *Por tanto, la recta que pasa por el punto* $(2,-1)$ *y es perpendicular a la recta dad tiene la siguiente ecuación.*

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-(-1)=-\frac{3}{2}(x-2)$$
$$2(y+1)=-3(x-2)$$
$$3x-2y-4=0$$

Ejercicios

1. *Dados los puntos* $K(-5,7)$ *y* $L(2,-3)$
   (a) *Distancia entre ellos*
   (b) *Punto medio segmento KL*
   (c) *Pendiente del segmento*
   (d) *Inclinación*
2. *Se tiene el triángulo formado por los puntos* $A(1,6)$, $B(-5,-2)$ *y* $C(8,1)$. *Determine*
   (a) *Perímetro*
   (b) *Area*
   (c) *Angulo en el vertice B*

(d) *La medida de la altura con respecto al lado BC*

3. *Hallar la ecuación de la recta que posee los siguientes datos:*

   (a) *Corta los ejes en $(4,0)$ y $(0,-5)$*

   (b) *Tiene pendiente $\frac{-3}{4}$ y pasa por el punto $F(1,-3)$*

   (c) *Pasa por el punto $A(1,-2)$ y es paralela a la recta $L_1 = 3x - 4y + 1$*

   (d) *Pasa por el punto $B(3,-4)$ y es perpendicular a la recta $L_2 = 5x - 3y + 7$*

4. *Hallar el área del triangulo que determinan las siguientes rectas: $L_1 = 2x - y - 1 = 0$; $L_2 = x - 3y + 2 = 0$; $L_3 = 3x + y - 14 = 0$*

5. *Determinar el ángulo agudo entre las rectas: $L_1 = x-2y+3 = 0$ y $L_2 = 2x+3y+1 = 0$*

6. *Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-3,0)$ y que forma un ángulo cuya tangente es igual a $\frac{3}{5}$con la recta $2x + 7y + 3 = 0$*

7. *Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-2,-2)$ y es paralela a la recta determinada por $P_1(2,7)$ y $P_2(-1,-5)$*

8. *Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de $x - 5y + 3 = 0$ y $4x + 6y - 2 = 0$ y es paralela a la recta $6x - 2y + 3 = 0$.*

9. *Determine el valor del coeficiente k para que las rectas $L_1 = 3x - 5y + 7 = 0$ y $L_2 = 5kx + 2y - 3 = 0$ sean perpendiculares*

10. *Un fabricante de pequeños aparatos dométicos encueque si produce x hornos con tostador en un mes costo de producción está dado por la ecuación $y = 6x + 300$ (y en dólares).*

    (a) *Trace la gráfica*

    (b) *¿Que representan la pendiente y la intersección en y de esta gráfica?*

11. *El costo mensual de conducir un automóvil depende del número de millas recorridas. Lynn observó que durante el mes de Mayo gastó 380 dolares por 480 millas y en junio 460 dolares por 800 millas.*

(a) *Exprese el costo mensual* C *en función de la distancia recorrida d, suponiendo que una relación lineal proporciona un modelo adecuado.*

(b) *Utilice el inciso anterior para predecir el costo de conducir* 1500 *millas por mes.*

(c) *Trace gráfica de la ecuación ¿Qué representa la pendiente de la recta?*

(d) *¿Que representa la intersección en* y *de la gráfica?*

(e) *¿Por qué una relación lineal es un modelo adecuado en esta situación?*

12. *En aire estable, la temperatura del aire disminuye alrededor de* $5F$ *por cada* 1000 *pies de altura.*

    (a) *Si la temperatura al nivel del mar es* $70F$ *y un piloto comercial reporta una temperatura de* $-20F$ *a* 18000 *pies, escriba una ecuación lineal que exprese la temperatura* T *en términos de la altitud* A *(en miles de pies).*

    (b) *¿A qué altura está el avión si la temperatura es de* $0F$*?*

    (c) *¿Cuál es la pendiente de la gráfica de la ecuación que se encontró en el primer inciso? Interprete verbalmente.*

13. *Un empleado tiene dos opciones a puestos en una gran corporación. En un puesto le pagan* 12.50 *dolares por hora más un bono de* 0.75 *dolares por unidad producida. En el otro,* 9.20 *dolares por hora más un bono de* 1.30 *dolares*

    (a) *Representar graficamente las ecuaciones lineales correspondientes a los salarios por hora* W *en términos de* x*, el número de unidades producidas por hora, para cada una de las opciones.*

    (b) *Graficar las ecuaciones y encontrar su punto de intersección*

    (c) *Interpretar el significado del punto de intersección de las gráficas del inciso anterior. ¿Cómo usaría esta información para seleccionar la opción correcta si su objetivo fuera obtener el mayor sueldo por hora?*

BIBLIOGRAFIA

1. *Barnett, Ziegler, Byleen. Precálculo Funciones y Gráficas. Cuarta Edición.*

2. *Dávila, Navarro, Carvajal. Introducción al Cálculo.*

3. *Larson, Hostetler, Edwards. Cálculo I. Octava Edición*

4. *Stewart, Redlin, Watson. Precálculo. Tercera Edición.*